

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler  
Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

Geleitwort . . . . .	413
BRANDENBERGER, E.: Paul Niggli (1888–1953). Seine Verdienste um die Lehre des festen Körpers. . . . .	415
BURRI, C.: Zur Theorie und Praxis der Drehkompensatoren nach Berek und Ehringhaus . . . . .	418
BUSCH, G., und JAGGI, R.: Messung des Hall-Effekts in Zylindern ohne äusseres Magnetfeld . . . . .	425
MOOSER, E.: Ein Gerät zur graphischen Bestimmung der Fermi-Grenzenergie in Halbleitern . . . . .	433
SCHAETTI, N.: Beeinflussung der Charakteristik einer Cs-Sb-Photokathode durch Zusatz fremder Elemente . . . . .	450
TREADWELL, W. D., und WERNER, W.: Zur Kenntnis der Dampfdrucke von Zäsium-, Rubidium- und Kaliumchlorid . . . . .	459
WEYL, H.: Über die kombinatorische und kontinuumsmäßige Definition der Überschneidungszahl zweier geschlossener Kurven auf einer Fläche . . . . .	471

## *Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves*

LIST, R., und DE QUERVAIN, M.: Zur Struktur von Hagelkörnern. . . . .	492
PARKER, R. L., Eine praktische Methode zur Transformation von Kristallstereogrammen in gnomonische Projektion . . . . .	497
STEINEMANN, S.: Kammeis, eine anomale Wachstumsform der Eiskristalle. . . . .	500

ZAMP	Vol. IV	Fasc. 6	Pag. 413–506	15. 11. 53
------	---------	---------	--------------	------------

Verlag Birkhäuser Basel, Schweiz

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hiengegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten* von Fr. 15.— pro Seite zu entrichten. Für Arbeiten, die mehr als 24 Seiten Umfang aufweisen, bedarf es einer Verständigung mit der Redaktion.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in another than the original language. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separata prints without cover. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution* of Fr. 15.— per page exceeding these 16 pages. In case of articles of more than 24 pages, a special arrangement has to be made with the Editor.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution* de Fr. 15.— doit être payée par page supplémentaire. Dès qu'il s'agit de 24 pages ou plus, l'auteur est prié de se mettre en relation avec la rédaction.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.—, Ausland Fr. 48.—, Einzelnummer Fr. 10.—

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.—, foreign Fr. 48.—, single copy Fr. 10.—

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38, étranger Fr. 48.—, le numéro Fr. 10.—

Postabonnement — Post-office subscription — Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg  
Italien

Dänemark  
Marokko

Deutschland  
Norwegen

Finnland  
Portugal

Holland  
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 165.—,  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr. 88.—,  $\frac{1}{8}$  Seite/page: Fr. 50.—

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1953 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland



## GEDENKHEFT

## PAUL NIGGLI

*Die Redaktions-Kommission und die Redaktion haben beschlossen, die vorliegende Nummer der ZAMP als Gedenkheft für den am Anfang dieses Jahres verstorbenen Prof. Dr. Paul Niggli herauszugeben aus dem Bedürfnis heraus, dem Verstorbenen für seine Verdienste um die Gründung der Zeitschrift und Herausgabe der ersten Jahrgänge ihre Dankbarkeit zu bezeugen. Kollegen und Schüler Paul Niggli's haben sich zur grossen Freude der Kommission gerne bereit gefunden, zu diesem Gedenkheft beizutragen. Ihnen allen sei für ihre Mitarbeit verbindlichst gedankt; sie haben durch ihren Beitrag in eindrucklicher Weise auch Zeugnis gegeben von der grossen Persönlichkeit des Verstorbenen und seinen unvergänglichen Leistungen als Lehrer und Forscher.*





Miggli





# PAUL NIGGLI

(1888 – 1953)

## Seine Verdienste um die Lehre des festen Körpers

Wenn an dieser Stelle Rückschau gehalten werden soll auf das Viele und Wesentliche, mit dem PAUL NIGGLI während seiner unermüdlichen, mehr als vier Jahrzehnte umspannenden Forschertätigkeit die Lehre des festen Körpers immer wieder neu bereicherte, so nicht, um beim einzelnen zu verweilen, sondern weit mehr um noch einmal jener besonderen und einzigartigen Leistungen zu gedenken, mit denen er unsere Einsicht in das Wesen des festen Zustandes und die Wege, diese Erkenntnis zu mehren und zu vertiefen, so nachhaltig gefördert hat.

Eine ihrer grössten steht bemerkenswerterweise gleich am Anfang jener Epoche, da sich NIGGLI, angeregt durch die von-Lauesche Entdeckung der Röntgeninterferenzen und die ersten Kristallstrukturbestimmungen durch W. H. und W. L. BRAGG, eingehender mit der Struktur der Kristalle auseinanderzusetzen begann: seine 1918/19 erschienene, im Manuskript bereits 1917 fertiggestellte *Geometrische Kristallographie des Diskontinuums*. Bedeutung und Tragweite dieses Werkes erneut aufzurufen, legt sich heute besonders nahe, seit die auf dem Boden internationaler Gemeinschaftsarbeit erfolgte Herausgabe *Internationaler Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen* oder der neuerdings erschienenen *International Tables for X-Ray Crystallography* mancherorts vergessen lässt, dass es seinerzeit die *persönliche* Leistung NIGGLIS war, welche für alles das die erste sichere Grundlage geschaffen. Wohl hatte bereits zwei Jahrzehnte vor der Entdeckung der Röntgeninterferenzen A. SCHOENFLIES in seinem Buch *Kristallsysteme und Kristallstruktur* eine gruppentheoretisch erschöpfende Herleitung der 230 möglichen Symmetriefälle dreidimensionaler, periodisch gebauter Diskontinua gegeben, aber *erst* die von NIGGLI unternommene, in verblüffend kurzer Zeit vollendete, explizite Darstellung der analytisch-geometrischen Eigenschaften aller 230 Raumsysteme hat aus der Kristallstrukturtheorie jenes Instrument gemacht, das bei der experimentellen Bestimmung von Kristallstrukturen unschätzbare Dienste zu leisten vermag und denn auch seither allorts erfolgreiche Anwendung findet. Stets hat es ihn dabei mit besonderer (und fürwahr berechtigter) Genugtuung erfüllen können, dass bei den unzähligen Koordinatentripeln, die es für die verschiedenen Punktlagen sämtlicher 230 Raumgruppen zu berechnen galt, ihm nur eine verschwindend kleine Zahl von Versehen unterlaufen war, seine Darstellung der analytischen Geometrie dreidimensionaler Diskontinua nicht nur die erste, sondern auch die *endgültige* gewesen. Zugleich hat er damals der Strukturtheorie

zu jenem System von Begriffen verholten, wie sie – so etwa als Gitterkomplex, Punktlage, Zähligkeit, Freiheitsgrad, Symmetriebedingung und weitere mehr – zur rationellen Beschreibung der Raumsysteme, aber auch der Kristallstrukturen selber notwendig sind und heute in einem Masse Allgemeingut geworden, dass darob ihr Schöpfer nur allzuoft übersehen wird.

Endlich war es ihm vergönnt, in seinem «Diskontinuum» *erstmal*s den Weg aufzuzeigen, welcher die experimentelle Bestimmung der Raumgruppe einer Kristallstruktur gestattet und in Form bestimmter Auslöschungsgesetze (der Auswahlregeln, wie er sie damals nannte) jene Kriterien zu formulieren, die seitdem die Grundlage jeder *Raumgruppenbestimmung* bilden. Es bleibt sein Verdienst, später eine noch allgemeinere Behandlung dieses Kapitels der Strukturtheorie angeregt zu haben, wie er im Anschluss an sein grundlegendes Werk auch selber immer wieder strukturtheoretische Probleme aufgegriffen, um sie alle mit besonderem Erfolg zu bearbeiten.

In den abschliessenden Kapiteln des «Diskontinuums» findet sich bereits angeschnitten, was NIGGLI fortan stets von neuem beschäftigen sollte: die Erkenntnis unmittelbarer Beziehungen zwischen der Struktur einer Kristallart und ihrem makroskopisch- oder mikroskopisch-phänomenologischen Verhalten, wobei ihn bei seiner spezifischen Begabung und Vorliebe für die Behandlung morphologischer Fragestellungen die Relation zwischen der Morphologie der Kristalle und ihrer Struktur besonders lockte, unter demselben Aspekt aber auch das Kristallwachstum als solches wie die Geometrie der Kristallplastizität beschäftigten.

Die in den zwanziger Jahren rasch anwachsende Zahl exakter Kristallstrukturbestimmungen führte bekanntlich zu zwei Feststellungen, die zunächst überraschend, an den klassischen Vorstellungen über den Aufbau der festen Materie gemessen, gar durchaus unerwartet wirken mussten und welche beide nicht von ungefähr die Arbeitsrichtung, welche NIGGLI während seiner ganzen Zürcher Tätigkeit auf dem Gebiete der Kristallkunde eingeschlagen, entscheidend mitbestimmten:

Zum ersten die Tatsache, dass zahlreiche Kristallarten grundsätzlich gleiche Atomanordnung besitzen, sich voneinander nur durch die absolute Grösse der Abstände unter ihren Atomen unterscheiden, und andererseits die Einsicht, dass im festen Zustand lediglich eine beschränkte Gruppe von Elementen und Verbindungen aus eigentlichen Molekülen besteht, bei der Mehrzahl der festen Körper vielmehr der klassische Molekülbegriff durch jenen des an sich unbegrenzten (makromolekularen) Atomverbandes ersetzt werden muss.

Je grösser die Zahl bekannter Kristallstrukturen, desto augenscheinlicher wurde, wie es offenbar *ausgezeichnete* Strukturtypen gibt, welche bevorzugt auftreten, und NIGGLI stellte daher sehr bald die Frage nach den Kriterien, welche eine Kristallstruktur besonders qualifizieren und daher besonders häufig reali-



sierbar machen, dann aber auch die weitere nach jenen Gesetzen, wie sie für die Verteilung der einzelnen Strukturtypen auf die Mannigfaltigkeit der Elemente und chemischen Verbindungen massgebend sind. Beiden Aufgaben waren jene elf Mitteilungen gewidmet, welche NIGGLI in den Jahren 1930 bis 1933 – im Anschluss an seine Studien über eine topologische Strukturanalyse – unter dem Titel *Stereochemie der Kristallverbindungen* veröffentlichte, dabei von den einfach zusammengesetzten Verbindungen (wie  $AB$ ,  $AB_2$ ,  $AB_3$  und  $A_2B_3$  usw.) ausgehend, nach jenen Merkmalen suchend, welche die wenigen, tatsächlich existierenden Strukturtypen unter der Vielzahl an sich denkbarer auszeichnen. Wie erschöpfend die hierfür von NIGGLI als massgebend erwiesenen Prinzipien (Symmetrie, einparametrische Zusammenhänge, Dichte der Packung usw.) den Gegenstand erfassten, beweist wohl am überzeugendsten, dass er in jenen Arbeiten eine ganze Reihe damals noch nicht bekannter Strukturtypen voraussagen konnte und diese bei gewissen Verbindungen seither tatsächlich gefunden wurden.

Aber auch die Frage nach dem Existenzbereich der einzelnen Strukturtypen in Abhängigkeit von den Eigenschaften der an ihrem Aufbau beteiligten Atome erfuhr mit diesen Untersuchungen wesentliche Klärung, wobei NIGGLI die kürzesten Bindungsabstände unter den Atomen als jene Grösse erkannte, welche in erster Linie über den zu erwartenden Strukturtyp entscheidet (er zog diese Betrachtungsweise der von V. M. GOLDSCHMIDT vertretenen, auf der Einführung von Ionenradien basierenden mit Entschiedenheit vor, weil er in den Bindungsabständen als den direkt ermittelten Grössen das zuverlässigere Kriterium erblickte als in den Ionenradien, deren Ableitung ja damals, mindestens in gewissen Fällen, noch reichlich hypothetisch war).

Mit alledem wurde – wohl weitgehend unbewusst – vorbereitet, was später in zwei grundlegenden Buchdarstellungen seinen Niederschlag fand: eine allgemeine Stereochemie, die in der Lage sein sollte, Molekül- und Kristallverbindungen in gleich erschöpfender Weise zu behandeln, und eine neuzeitliche Übersicht über die chemische und strukturelle Mannigfaltigkeit der Kristallarten, vorab der als natürliche Mineralien vorkommenden. Die erste Absicht hat NIGGLI 1945 in seinen *Grundlagen der Stereochemie* verwirklicht, der zweiten war der 3. Teil: «Kristallchemie, Geochemie und Mineralchemie» der dritten Auflage seines *Lehrbuches der Mineralogie und Kristallchemie* gewidmet, der (an die 800 Seiten umfassend) 1944 zwar gedruckt vorlag, indessen nach dem Druck durch die Kriegereignisse der Zerstörung anheimfiel. Gerade das zweite Thema hatte dazu geführt, den Begriff der Kristallart von Grund auf zur Diskussion zu stellen und neu zu formulieren, so dass es besonders erfreulich war, dass später wenigstens diese Betrachtungen als *Probleme der Naturwissenschaften, erläutert am Begriff der Mineralart* gesondert veröffentlicht wurden.

So sehr NIGGLI – und zwar nicht nur auf dem hier näher betrachteten Sektor seiner wissenschaftlichen Tätigkeit – stets am Anschluss seiner Arbeiten an die neuere Entwicklung von Physik und Chemie gelegen war, so beruhen dennoch

Wesen und Stärke seiner Beiträge zur Lehre der festen Körper auf der von ihm mit so überlegener Meisterschaft gepflegten, *geometrisch-morphologischen* Betrachtungsweise, und es gelang ihm gerade dadurch, das Eigenständige und Spezifische der Kristallkunde gegenüber ihren zahlreichen Nachbarwissenschaften voll zu wahren. Mochte dem Physiker dann und wann der Einwand nahe liegen, es sollte die geometrische Behandlung zu einer dynamisch-energetischen ausgeweitet oder gar völlig durch eine solche ersetzt werden, so darf eines nicht übersehen werden: dass in den letzten drei Jahrzehnten und auch heute noch für manche Erscheinungen eine geometrische Deutung oder doch mindestens eine Ordnung unter geometrischen Gesichtspunkten weitgehend möglich, ihre dynamisch-energetische Behandlung dagegen noch völlig ausgeschlossen ist, es aber bevorzugt eben derartige Fragen waren, denen NIGGLI mit einem besonderen Interesse begegnete.

Dazu kommt, dass Probleme des festen Zustandes ihn während seiner ganzen Forschertätigkeit im Grunde genommen nie allein um ihrer selbst willen beschäftigten. Wenn einst das Verhalten der festen Körper als Bausteine der äusseren Erdrinde für ihn der Ausgangspunkt zu einem vertieften Eindringen in das Wesen der festen Materie gewesen, so hat er sich allezeit immer wieder neu darum bemüht, Fortschritte in der Lehre vom festen Körper auf das Studium *naturgegebener* Systeme, vorab der Mineralien und Gesteine, anzuwenden, damit aber in seltener Vollkommenheit die Synthese zwischen exakten und beschreibenden Naturwissenschaften vollzogen. E. BRANDENBERGER

(Eingegangen: 2. September 1953.)

## Zur Theorie und Praxis der Drehkompensatoren nach Berek und Ehringhaus

Von CONRAD BURRI, Zürich<sup>1)</sup>

*Zusammenfassung.* Es wird eine einfache Ableitung der Kompensatorfunktion für den Kalkspatkompensator nach BEREK (Leitz) und den Kombinationsquarzplatten-Kompensator nach EHRLINGHAUS (Winkel-Zeiss) gegeben und gezeigt, dass sich die beiden Ausdrücke nur in einer Konstanten unterscheiden. Die praktische Auswertung der Funktion wird diskutiert.

### A. Allgemeines

In doppelbrechenden Medien pflanzen sich im allgemeinen die Lichtschwingungen in Gestalt von zwei Wellen mit verschiedener Normalengeschwindigkeit

<sup>1)</sup> Mineralogisch-Petrographisches Institut der ETH.



bzw. Lichtbrechung fort, welche senkrecht zueinander polarisiert sind. Brechung und Schwingungsrichtung der beiden Wellen sind dabei durch das bekannte Gesetz von FRESNEL (Fundamentalsatz der Kristalloptik) bestimmt.

Liegt das doppelbrechende Medium in Gestalt einer planparallelen Platte vor, so weisen bei normaler Inzidenz die beiden Wellen gemeinsame Normalenrichtung auf, und der beim Austritt aus der Platte vorhandene Gangunterschied  $R$  berechnet sich aus der Plattendicke  $d$  und den Brechungsindizes  $n_2 > n_1$  der beiden Wellen zu

$$R = d (n_2 - n_1) . \quad (1)$$

Bei schiefer Inzidenz (Figur 1) unter einem Winkel  $i$  zur Plattennormalen gilt die Beziehung

$$R = d (n_2 \operatorname{ctg} r_2 - n_1 \operatorname{ctg} r_1) \quad (2)$$

oder, mit Hilfe des Brechungsgesetzes umgeformt,

$$R = \sin i (\operatorname{ctg} r_2 - \operatorname{ctg} r_1) , \quad (2a)$$

wobei  $r_1 > r_2$  die Brechungswinkel der beiden Wellennormalen mit den Brechungsindizes  $n_1 < n_2$  sind. In diesem Falle verlaufen somit die beiden Wellennormalen im Kristall getrennt, da für sie das Brechungsgesetz gilt.

Die Messung von Gangunterschieden an planparallelen Kristallplatten bei normaler Inzidenz spielt bei mineralogisch-petrographischen Untersuchungen eine grosse Rolle, wie auch bei photoelastischen, wobei bei diesen die an den an und für sich isotropen Probekörpern künstlich erzeugte Spannungsdoppelbrechung betrachtet wird.

Lange Zeit hindurch wurde der bekannte, von BABINET schon 1850 angegebene Quarzkeilkompensator, teilweise etwas modifiziert, für derartige Messungen fast ausschliesslich benützt. Seit etwa 30 Jahren wurde er jedoch für mineralogisch-petrographische Zwecke durch die einfacher gebauten Drehkompensatoren nach BEREK und EHRLINGHAUS verdrängt. Diese sind bei gleicher oder sogar grösserer Messgenauigkeit bedeutend einfacher zu handhaben, da sie keinen Aufsatzanalysator benötigen. Methodisch wichtige Beiträge zu ihrer Handhabung, insbesondere zur Erhöhung der Messgenauigkeit, wurden in neuerer Zeit von R. MOSEBACH veröffentlicht (R. MOSEBACH, 1948, 1949a, 1949b).

Das Prinzip dieser Drehkompensatoren, welches schon von BIOT und NIKITIN (NIKITIN, 1910) angewandt wurde, beruht darin, dass eine anisotrope Kristallplatte bzw. Plattenkombination um eine senkrecht zum Strahlengang

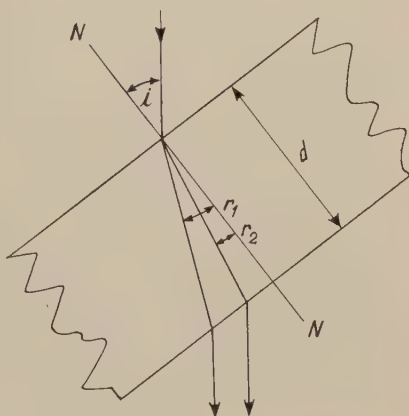


Fig. 1

des Systems angeordnete Achse drehbar ist. Durch ihre Neigung wird ein variabler Gangunterschied erzeugt, welcher zur Kompensation des zu messenden Gangunterschiedes benutzt wird. Die sogenannte Kompensatorfunktion liefert den erzeugten Gangunterschied in Funktion des messbaren Neigungswinkels. Als Ausgangslage des Instrumentes wird die Horizontalstellung der Platte genommen, für welche der Gangunterschied Null herrscht. Zur Eliminierung des Nullpunktfehlers wird die Kompensation durch Neigung der Platte nach beiden Seiten durchgeführt und der Mittelwert genommen.

Beim Kompensator nach BEREK (Leitz) (BEREK, 1913, 1924) dient als Kompensatorplatte eine senkrecht zur optischen Achse geschnittene, etwa 0,1 mm dicke Kalzitplatte, bei demjenigen nach EHRLINGHAUS (Winkel-Zeiss) (EHRLINGHAUS, 1931, 1938, 1939) eine Kombination von zwei je 1 mm dicken, parallel zur optischen Achse geschnittenen Quarzplatten in Subtraktionsstellung. Die Drehachse liegt in beiden Fällen in der Plattenebene, bei der Quarzplattenkombination zudem parallel einer Schwingungsrichtung. Die für mineralogisch-petrographische Zwecke gelieferte Normalausführung weist beim Berek-Kompensator für  $D$ -Licht einen Messbereich von 4 bis 5  $\lambda$ , bei demjenigen nach EHRLINGHAUS einen solchen von 7  $\lambda$  auf. Für Spezialzwecke sind jedoch Ausführungen mit grösserem Messbereich erhältlich. Der Kompensator nach EHRLINGHAUS wird auch mit einer Kalzitplatten-Kombination geliefert und erreicht auf diese Weise einen Messbereich bis 133 Ordnungen (EHRLINGHAUS, 1939).

Von beiden Autoren wurde die Kompensatorfunktion auf ganz verschiedenem, zum Teil unnötig kompliziertem Wege abgeleitet, so dass die grosse Analogie der beiden Instrumente, welche ihnen trotz ihres verschiedenen Aufbaus eigen ist, nicht in Erscheinung tritt. Es soll daher im folgenden gezeigt werden, wie dies auf einfachem und für beide Systeme gleicherweise gültigem Wege geschehen kann, sowie dass die Resultate in einheitlicher Schreibweise formal durchaus analog ausfallen.

## B. Ableitung der Kompensatorfunktion

### 1. Kompensator nach Berek (Leitz, Wetzlar)

Die hier gegebene Ableitung erfolgt unter Benützung des Ausdruckes (2a) für den Gangunterschied einer planparallelen Kristallplatte bei schiefer Inzidenz. Der Einfallswinkel  $i$  entspricht dabei dem variablen Neigungswinkel der Kompensatorplatte. Bezeichnet man den Brechungsindex der ordentlichen Welle mit  $\omega$ , den extremen Wert desjenigen der ausserordentlichen mit  $\varepsilon$  bzw. seinen relativen Wert mit  $\varepsilon'$ , so gilt in Anbetracht des optisch negativen Charakters des benutzten Kalzites  $\omega > \varepsilon$  und  $r_1 - r_{\varepsilon'} > r_2 - r_{\omega}$ . Um (2a) anwenden zu können, müssen  $\text{ctgr}_1$  und  $\text{ctgr}_2$  durch die bekannten bzw. messbaren  $\omega$ ,  $\varepsilon$  und  $i$  ausgedrückt werden. Für die ordentliche Welle gilt nach dem



Brechungsgesetz  $\sin i = \omega \sin r_2$ , woraus folgt

$$\operatorname{ctg} r_2 = \frac{\sqrt{\omega^2 - \sin^2 i}}{\sin i}.$$

Für die ausserordentliche Welle folgt einerseits aus dem Brechungsgesetz  $\varepsilon' \sin r_1 = \sin i$  und anderseits aus den geometrischen Eigenschaften der Indikatrix (Indexellipsoid)  $\varepsilon' = \omega \sqrt{\omega^2 \sin^2 r_1 + \varepsilon^2 \cos^2 r_1}$ . Durch Elimination von  $\varepsilon'$  erhält man

$$\operatorname{ctg} r_1 = \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 i}}{\sin i}.$$

In (2a) eingesetzt erhält man, wenn  $R$  in  $\lambda$  ausgedrückt wird, nach leichter Umformung als Kompensatorfunktion den Berek'schen Ausdruck

$$R = \frac{d}{\lambda} \omega \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\omega^2}} - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\varepsilon^2}} \right). \quad (3)$$

Für einen analog gebauten Kompensator, jedoch mit einer senkrecht zur optischen Achse geschnittenen Platte eines optisch positiv-einachsigen Kristalls, zum Beispiel Quarz, ergäbe sich ein entsprechender Ausdruck, jedoch mit vertauschten Vorzeichen der Wurzeln. Die Kompensatorfunktion kann daher allgemein geschrieben werden

$$R = \frac{d}{\lambda} \omega \left( \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\omega^2}} \mp \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\varepsilon^2}} \right), \quad (3a)$$

wobei die oberen Zeichen für optisch negative, die unteren für optisch positive Kompensatorplatten gelten.

## 2. Kompensator nach Ehringhaus (Winkel-Zeiss, Göttingen)

Von den beiden in Subtraktionsstellung miteinander kombinierten Quarzplatten sei diejenige mit der optischen Achse parallel der Drehachse mit I, diejenige mit der optischen Achse senkrecht zur Drehachse mit II bezeichnet.

Für Platte I ergibt sich in prinzipiell analoger Weise zur soeben gegebenen Ableitung für den Berek-Kompensator, jedoch unter Berücksichtigung des optisch positiven Charakters von Quarz,  $\omega < \varepsilon' < \varepsilon$  und, wenn wiederum  $r_1 > r_2$  gesetzt wird, dass  $r_1 = r_\omega > r_2 = r_\varepsilon'$  und

$$\operatorname{ctg} r_1 = \frac{\sqrt{\omega^2 - \sin^2 i}}{\sin i}, \quad \operatorname{ctg} r_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \sin^2 i}}{\sin i}$$

in (2a) eingesetzt, folgt für den Gangunterschied von Platte I in Funktion des Neigungswinkels  $i$

$$R_1 = d \left( \sqrt{\varepsilon'^2 - \sin^2 i} - \sqrt{\omega^2 - \sin^2 i} \right).$$

Für Platte II erhält man auf analoge Weise

$$\operatorname{ctg} r_1 = \frac{\sqrt{\omega^2 - \sin^2 i}}{\sin i}, \quad \operatorname{ctg} r_2 = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 \sin^2 i}}{\sin i}$$

und, ebenfalls unter Berücksichtigung von (2a),

$$R_{II} = d \left( \frac{\varepsilon}{\omega} \sqrt{\omega^2 \sin^2 i} - \sqrt{\omega^2 \sin^2 i} \right).$$

Da die beiden Platten zueinander in Subtraktionsstellung stehen, wird der Gangunterschied der Kombination  $R = R_I - R_{II}$ . Drückt man  $R$  wiederum in  $\lambda$  aus, so erhält man in Übereinstimmung mit EHRINGHAUS<sup>1)</sup>

$$R = \frac{d}{\lambda} \left( \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 i} - \frac{\varepsilon}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \sin^2 i} \right). \quad (4)$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf die gleiche Form bringen wie (3):

$$R = \frac{d}{\lambda} \varepsilon \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\varepsilon^2}} - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\omega^2}} \right). \quad (4a)$$

Der Unterschied gegenüber (3) besteht, abgesehen vom verschiedenen Vorzeichen der Wurzeln, wie es durch den verschiedenen optischen Charakter von Kalzit und Quarz bedingt ist, nur darin, dass einmal vor der Klammer  $\varepsilon$  steht, das andere Mal  $\omega$ .

Auch hier lässt sich eine allgemeine Schreibweise geben, bei welcher die oberen Zeichen für einen Kombinationsplatten-Kompensator mit optisch positiven, die unteren für einen solchen mit optisch negativen gelten:

$$R = \frac{d}{\lambda} \varepsilon \left( \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\varepsilon^2}} \mp \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\omega^2}} \right). \quad (4b)$$

Da die in den Ausdrücken (3) bzw. (4) vor den Klammern stehenden Brechungsindizes für bestimmte  $\lambda$  Konstanten darstellen, so ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, dass sich Basisplatten und Kombinationen aus achsenparallelen Platten einachsiger Kristalle in Subtraktionsstellung in bezug auf ihre Verwendung als Kompensatorplatten für Drehkompensatoren prinzipiell analog verhalten.

### C. Auswertung der Kompensatorfunktion

Die abgeleiteten Kompensatorfunktionen sind zur Berechnung der Gangunterschiede weder auf direktem noch auf logarithmischem Wege ohne weiteres

<sup>1)</sup> Bei EHRINGHAUS (1937, S. 318) stehen die beiden Glieder in der Klammer von (4) in umgekehrter Reihenfolge und mit vertauschten Vorzeichen, was zum optisch-positiven Charakter des Quarzes in Widerspruch steht. In einer späteren Mitteilung (EHRINGHAUS, 1938) ist das Versehen berichtigt.



geeignet. BEREK hat daher vorgeschlagen, die beiden Wurzeln nach dem binomischen Satze zu entwickeln und die Glieder gleicher Potenzen von  $\sin i$  zusammenzufassen. Dabei lässt sich ein Faktor

$$C_\lambda = \frac{d\omega}{2\lambda} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad (5)$$

ausklammern, so dass sich  $R$  wie folgt ergibt

$$R = C_\lambda \sin^2 i \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \sin^2 i + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{1}{\varepsilon^2 \omega^2} + \frac{1}{\omega^4} \right) \sin^4 i + \dots \right\}. \quad (6)$$

Dabei spielen die Glieder innerhalb der geschweiften Klammer, wie BEREK zeigen konnte, nur die Rolle von Korrektionsgliedern, für welche  $\omega$  und  $\varepsilon$  als unabhängig von  $\lambda$  angesehen werden können.  $C_\lambda$  kommt somit die Rolle einer von  $\lambda$  abhängigen Kompensationskonstante zu, und die Gangunterschiede ergeben sich zum Beispiel für  $D$ -Licht, wenn man  $\omega_D = 1,6584$  und  $\varepsilon_D = 1,4865$  einsetzt, zu

$$R_D = C_D \sin^2 i (1 + 0,2040 \sin^2 i + 0,0627 \sin^4 i) = C_D f(i). \quad (7)$$

Bei bekannter Konstante  $C_\lambda$  lässt sich somit für jedes gemessene  $i$  das zugehörige  $R$  berechnen. Eine tabellarische Zusammenstellung der Werte von  $f(i)$  bzw.  $\log f(i)$  für Intervalle von  $0,1^\circ$  wird von der Herstellerfirma jedem Instrument beigegeben. Sie befindet sich auch bei BEREK (1924). Eine Neuberechnung von  $\log f(i)$  auf vier Stellen gibt MOSEBACH (1948, S. 527). Die Kompensatorkonstante liesse sich nach (5) prinzipiell berechnen. Wegen der Schwierigkeit der genauen Dickenbestimmung des Kalzitplättchens ist jedoch die experimentelle Bestimmung vorzuziehen. Für die Linien  $C, D, F$  und den konventionellen Schwerpunkt des weissen Lichtes werden die Werte dem Instrument beigegeben.

In ganz gleicher Weise lassen sich die Wurzeln der Ehringhausschen Kompensatorfunktion (4) entwickeln, wobei sich wegen des optisch positiven Charakters des Quarzes die Kompensatorkonstante zu

$$C_\lambda = \frac{d\varepsilon}{2\lambda} \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \quad (8)$$

ergibt. Setzt man die Brechungsindizes für Quarz  $\varepsilon_D = 1,5534$  und  $\omega_D = 1,5443$  ein, so erhält man für die Gangunterschiede für  $D$ -Licht

$$R_D = C_D \sin^2 i (1 + 0,2084 \sin^2 i + 0,0652 \sin^4 i). \quad (9)$$

Die Kompensatorkonstante kann wie im Falle des Berek-Kompensators experimentell bestimmt werden. Da jedoch von der Herstellerfirma alle Kompen-

satoren der Normalausführung mit Quarzplatten von der gleichen Dicke  $d = 1$  mm (Dicke der Kombination somit 2 mm) ausgerüstet werden, kann sie für beliebige  $\lambda$  auch berechnet werden. Für die  $D$ -Linie ergibt sich so zum Beispiel

$$C_D = 6,4633.$$

Es liessen sich somit, wie oben angegeben, die Gangunterschiede aus den gemessenen Winkeln  $i$  berechnen, wobei für den praktischen Gebrauch die Werte für  $f(i)$  bzw.  $\log f(i)$  zu tabellieren wären. Da jedoch alle Kompensatoren der Normalausführung Quarzplatten gleicher Dicke aufweisen, was infolge der ausgezeichneten schleiftechnischen Eigenschaften des Quarzes keine Schwierigkeit macht, hat es die Herstellerfirma vorgezogen, ihren Instrumenten eine Tabelle beizugeben, aus welcher die Gangunterschiede für Intervalle von  $0,1^\circ$  für die  $C$ -,  $D$ - und  $F$ -Linie direkt entnommen werden können. Für andere  $\lambda$  muss interpoliert werden, was linear geschehen darf. Dieses Vorgehen ist jedoch für orientierende Messungen, im weissen Licht, wie sie bei petrographischen Untersuchungen oft vorkommen, sehr lästig. Für diesen Fall ist eine experimentelle Bestimmung der Konstanten für weisses Licht bzw. deren Berechnung für dessen konventionellen Schwerpunkt  $\lambda = 550 \mu\mu$  und die Auswertung mit einer Funktionstabelle entschieden vorzuziehen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- M. BEREK, Cbl. Min. 388-396, 437-445, 464-470 u. Nachtr. 580-582 (1913).  
 M. BEREK, *Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaldrehtischmethoden* (Bornträger, Berlin 1924), S. 27-28, 40-46, 133-137.  
 A. EHRLINGHAUS, Z. Kristallogr. 76, 315-321 (1931).  
 A. EHRLINGHAUS, Z. Kristallogr. 98, 394-406 (1938).  
 A. EHRLINGHAUS, Z. Kristallogr. 102, 85-111 (1939).  
 R. MOSEBACH, Heidelberger Beitr. Min. Petr. Krist. 1, 515-528 (1948).  
 R. MOSEBACH, Heidelberger Beitr. Min. Petr. Krist. 2, 167-171 (1949a).  
 R. MOSEBACH, Heidelberger Beitr. Min. Petr. Krist. 2, 172-175 (1949b).  
 W. NIKITIN, Z. Kristallogr. 47, 378-379 (1910).

#### Summary

A simple derivation of the compensator formulas for the rotating compensators after BEREK and EHRLINGHAUS is given and their virtual identity is shown. Suggestions for the calculation of path differences from the measurements are made.

(Eingegangen: 27. Juni 1953.)



# Messung des Hall-Effekts in Zylindern ohne äusseres Magnetfeld

VON GEORG BUSCH UND RUDOLF JAGGI, Zürich<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Im Anschluss an die Entwicklung einer ballistischen Methode zur Messung des Hall-Effektes mit induzierten Strömen<sup>2)</sup> wurden wir auf die Möglichkeit aufmerksam, den Hall-Effekt ohne äusseres Magnetfeld lediglich mit Hilfe des Primärstromes allein zu messen<sup>3)</sup>. Es wird davon Gebrauch gemacht, dass im Innern eines stromdurchflossenen Leiters das stets vorhandene Eigenmagnetfeld auf den Strom wirkt und so einen Hall-Effekt erzeugt. Diese Erscheinung wollen wir kurz «Eigen-Hall-Effekt» nennen. Besonders übersichtliche Verhältnisse bestehen in einem axial durchströmten Kreiszylinder, bei dem die magnetischen Kraftlinien konzentrische Kreise bilden.

## 2. Prinzip des Eigen-Hall-Effekts

### a) Von Gleichstrom durchflossener Vollzylinder

In einem gegen seinen Radius  $r_a$  bzw. Durchmesser  $d$  langen Vollzylinder der Permeabilität  $\mu = 1$  fliesst in axialer Richtung ein Gleichstrom  $J$  der Dichte  $j_z$ . An jedem Ort vom Radius  $r \leq r_a$  entsteht unter dem Einfluss des tangential gerichteten Eigenmagnetfeldes  $H_\varphi$  auf den Strom eine radiale elektrische Hall-Feldstärke  $E_r$  (Figur 1). Diese ist, ausgedrückt im Giorgi-System,

$$E_r = \mu_0 R j_z H_\varphi, \quad (1)$$

wenn  $\mu_0$  die Induktionskonstante und  $R$  die Hall-Konstante bedeuten. Letztere wird wie üblich als feldunabhängig vorausgesetzt.

Das Eigenmagnetfeld des Stromes beträgt

$$H_\varphi(r) = \frac{1}{2} j_z r. \quad (2)$$

Damit wird (1)

$$E_r(r) = \frac{\mu_0 R}{2} j_z^2 r \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> G. BUSCH, R. JAGGI und P. BRAUNSCHWEIG, Helv. Phys. Acta 26, 392 (1953).

<sup>3)</sup> W. VAN B. ROBERTS, Phys. Rev. 24, 532 (1924).

und die Hall-Spannung zwischen der Achse und der Oberfläche des Zylinders

$$V = - \int_{r=0}^{r_a} E_r(r) dr = - \frac{\mu_0 R}{4} j_z^2 r_a^2. \quad (4)$$

Führt man den Strom  $J$  ein, so wird

$$V = - \frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J^2}{r_a^2} = - \mu_0 R \left( \frac{J}{\pi d} \right)^2. \quad (5)$$

Die Feldstärke im Zylindermantel ist nach (2)

$$H_a = \frac{1}{2} j_z r_a = \frac{J}{\pi d}, \quad (6)$$

so dass man auch schreiben kann

$$V = - \mu_0 R H_a^2. \quad (7)$$

Das Vorzeichen gibt an, dass bei Stoffen mit positiver Hall-Konstante (anomaler Hall-Effekt) der Zylindermantel negativ wird.

Eine Abschätzung soll die Grössenordnung des Eigen-Hall-Effektes zeigen: Mit

$$d = 0,1 \text{ cm}, \quad J = 10 \text{ A}, \quad R = -1 \frac{\text{cm}^3}{\text{As}}$$

berechnet sich eine Feldstärke

$$H_a = 31,8 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$$

und eine Hall-Spannung

$$V = 1,27 \cdot 10^{-5} \text{ V},$$

die sich mit den bei anderen Methoden erreichbaren Werten durchaus vergleichen lässt. Demgegenüber bleibt im allgemeinen die Widerstandsänderung durch das Eigenmagnetfeld unmessbar klein.

### b) Wechselstrom als Primärstrom

Gemäss Gleichung (5) ist die Eigen-Hall-Spannung  $V$  proportional dem Quadrat des Stromes  $J$  und daher unabhängig von der Stromrichtung. Fliesst durch die Probe der Wechselstrom

$$J(t) = J_0 \sin \omega t,$$

so bleibt bei einer niedrigen Frequenz  $\nu$  bzw. Kreisfrequenz  $\omega$  der Skineffekt

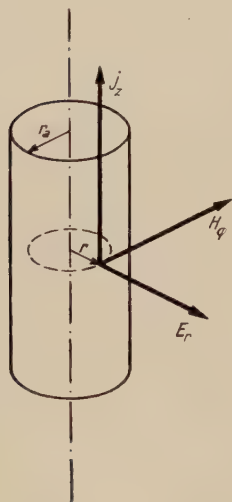


Fig. 1  
Prinzip des  
Eigen-Hall-Effekts.

vernachlässigbar (vgl. Abschnitt 4b), und (5) liefert

$$V(t) = -\frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J_0^2}{r_a^2} \sin^2 \omega t,$$

oder, umgeformt,

$$V(t) = -\frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J_{eff}^2}{r_a^2} (1 - \cos 2 \omega t). \quad (8)$$

Es entsteht eine Hall-Gleichspannung, die mit einer Hall-Wechselspannung derselben Amplitude und der doppelten Primärfrequenz überlagert ist. Bei einem Effektivwert des Wechselstromes  $J_{eff}$  sind diese Spannungen von derselben Grösse wie die Eigen-Hall-Spannung bei einem Gleichstrom  $J$ .

### c) Stromdurchflossener Hohlzylinder

Das Eigenmagnetfeld in einem Hohlzylinder vom Innenradius  $r_i$  beträgt

$$H_\varphi(r) = \frac{1}{2} j_z \frac{r^2 - r_i^2}{r}. \quad (9)$$

Damit liefert eine a) entsprechende Rechnung eine Eigen-Hall-Spannung zwischen dem Innen- und Aussenmantel des Zylinders

$$V_H = -\frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J^2}{r_a^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 + 2 \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 \ln \frac{r_i}{r_a}}{\left[1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2\right]^2}. \quad (10)$$

Mit  $r_i = 0$  ergibt sich selbstverständlich Gleichung (5) für den Vollzylinder. Bei wachsendem  $r_i/r_a$  nimmt  $V_H$  ab; geht  $r_i/r_a$  gegen 1, so nähert sich die Eigen-Hall-Spannung dem Wert

$$V_S = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J^2}{r_a^2} = -\frac{1}{2} \mu_0 R H_a^2. \quad (11)$$

## 3. Messmethode

### a) Anordnung der Hall-Elektroden

Die Eigen-Hall-Spannung muss bei einem Vollzylinder zwischen der Oberfläche und der Achse, bei einem Hohlzylinder zwischen dem Aussen- und Innenmantel abgegriffen werden. Diese Flächen sind zwar bezüglich der Eigen-Hall-Spannung Äquipotentialflächen, und die Hall-Elektroden könnten an beliebigen Stellen angebracht werden. Damit aber der zum Primärstrom  $J$  proportionale Spannungsabfall längs der Probe nicht aufgenommen wird, müssten die innere und die äussere Hall-Sonde in derselben zur Achse senkrechten Ebene liegen. Das ist schwer zu realisieren, und es empfiehlt sich, auf die in



Figur 2 angegebene Weise mit einem gegen den Probenwiderstand hochohmigen Potentiometer  $P$  einen Punkt festzulegen, der auf dem gleichen Primärpotential wie die innere Hall-Sonde  $S_1$  ist.

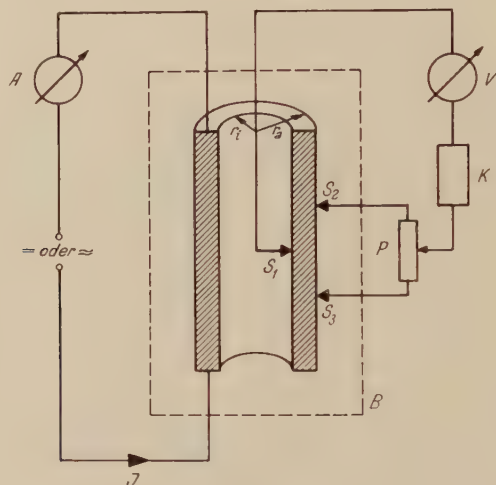


Fig. 2

Schema der Messanordnung.

Die Einstellung dieses sogenannten «isoelektrischen Punktes» gelingt bei Anwendung von Wechselstrom unter normalen Arbeitsbedingungen besonders einfach: Da neben einer Hall-Gleichspannung eine Hall-Wechselspannung der Frequenz  $2\nu$  entsteht, ist das Potentiometer so abzugleichen, dass im Messkreis keine Spannung der Primärfrequenz  $\nu$  auftritt.

Die innere Hall-Sonde könnte bei einem Vollzylinder in einer radialen oder axialen Bohrung angebracht werden, was jedoch die homogene Stromverteilung stören würde. Zweckmässig sind Hohlzylinder, bei denen die Anordnung von  $S_1$  keine Schwierigkeiten bereitet.

Figur 2 zeigt das Prinzip der Messmethode. Das Instrument  $V$  dient zur Bestimmung der Hall-Spannungen möglichst in Verbindung mit einem Kompensationsapparat  $K$ ,  $A$  ist ein Amperemeter zur Messung des Primärstromes  $J$ ,  $B$  bezeichnet ein Temperaturbad.

#### b) Verwendung von Wechselstrom

Die Verwendung von Wechselstrom als Primärstrom bietet mancherlei Vorteile: An den Stromzuführungen entsteht kein Peltier-Effekt, der isoelektrische Punkt ist bequem einzustellen; sodann bestehen zur Untersuchung des Eigen-Hall-Effekts nach Abschnitt 2b zwei Möglichkeiten:

Einerseits kann man die auftretende Hall-Gleichspannung zur Anzeige bringen, beispielsweise mit Hilfe eines langsam schwingenden Galvanometers. So lässt sich ohne Eichsubstanzen das Vorzeichen des Hall-Effekts schnell und sicher wie bei sonst keiner Wechselstrommethode festlegen.

Andererseits ist es für eine genaue Messung vorteilhafter, die Hall-Wechselspannung der Frequenz  $2\nu$  zu bestimmen, etwa mittels Vibrationsgalvanometer oder elektronischer Verstärker. Eventuelle Störspannungen der Frequenz  $\nu$  können ausgefiltert oder kompensiert werden; insbesondere gelingt es, störende Gleichspannungen, zum Beispiel thermoelektrischen Ursprungs, vollständig zu eliminieren.

### c) Anwendung eines Temperaturbades

Zur Ableitung der vom Primärstrom entwickelten Jouleschen Wärme und zur Vermeidung der durch den Ettingshausen-Effekt bewirkten Temperaturdifferenzen, die bei verschiedenem Material von Probe und Sonden zu Thermokräften führen, bringt man die Probe in ein Temperaturbad, das hier genügend gross gewählt und intensiv durchgerührt werden kann.

Am besten verwendet man Substanzen in Form von Hohlzylindern, bei denen die Badflüssigkeit auch an der Innenseite und der dort angebrachten Hall-Sonde  $S_1$  vorbeiströmt. Eine Kontrolle, ob eine unzulässige Erwärmung durch den Primärstrom auftritt, ist durch Widerstandsmessung möglich, wobei die Elektroden  $S_2$  und  $S_3$  als Potentialdrähte dienen.

## 4. Besonderheiten des Eigen-Hall-Effekts

Die auch bei jeder anderen Methode infolge Joulescher Wärme, Ettingshausen-Effekt, Peltier-Effekt und sonstiger thermoelektrischer Ursachen möglichen Störungen werden durch die im 3. Abschnitt erwähnten Massnahmen mit Sicherheit vermieden. Im weiteren soll noch gezeigt werden, dass die von allen bekannten Verfahren abweichende Erzeugung des Hall-Effekts durch das räumlich und eventuell zeitlich variable Eigenmagnetfeld zu keinen Fehlern Anlass gibt.

### a) Inhomogenität des Magnetfeldes

Im Gegensatz zu dem homogenen Magnetfeld der konventionellen Methode ist das den Eigen-Hall-Effekt hervorrufende Magnetfeld inhomogen. Daher muss untersucht werden, welchen Einfluss das magnetische Moment der Ladungsträger ausübt.

Die Kraft  $\vec{K}$  auf einen magnetischen Dipol vom Moment  $\vec{m}$  im inhomogenen Magnetfeld  $\vec{H}$  beträgt allgemein

$$\vec{K} = (\vec{m} \nabla) \vec{H} . \quad (12)$$

Zum Zwecke einer groben Abschätzung betrachten wir in unserem Zylinder  $n$  Ladungsträger pro Kubikzentimeter der Ladung  $e$  mit dem mittleren magnetischen Moment  $\bar{m}_L$  parallel  $H_\varphi$ . Gemäss (12) wirkt auf die Volumeinheit eine Kraft in radialer Richtung

$$K_r = n \bar{m}_L \frac{\partial H_\varphi}{\partial r}. \quad (13)$$

Nun führen wir die Magnetisierung  $M_L$  ein. Diese ist das magnetische Moment pro Volumeinheit

$$M_L = n \bar{m}_L, \quad (14)$$

oder mit der Ladungsträger-Suszeptibilität  $\chi_L$  ausgedrückt

$$M_L = \mu_0 \chi_L H_\varphi. \quad (15)$$

Aus (13) folgt mit (14) und (15)

$$K_r = \mu_0 \chi_L H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial r}. \quad (16)$$

Durch die Kraft  $K_r$  erfahren die Ladungsträger eine radiale Ablenkung, wodurch eine elektrische Feldstärke  $E'_r$  entsteht. Da in radialer Richtung kein Strom fließen soll, muss Gleichgewicht bestehen zwischen der magnetischen Kraft  $K_r$  und der elektrischen Kraft  $n e E'_r$ :

$$\mu_0 \chi_L H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + n e E'_r = 0.$$

Daraus bestimmt sich eine elektrische Feldstärke

$$E'_r(r) = - \frac{\mu_0 \chi_L}{n e} H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \quad (17)$$

und eine Spannung zwischen der Achse und dem Mantel eines Vollzylinders

$$V' = - \int_{r=0}^{r_a} E'_r(r) dr = \frac{\mu_0 \chi_L}{n e} \int_{H_\varphi=0}^{H_a} H_\varphi dH_\varphi,$$

da  $H_\varphi$  nur von  $r$  abhängt. Beim Hohlzylinder ist für  $r = r_i$  gleichfalls  $H_\varphi = 0$ , somit ergibt sich beim Voll- wie beim Hohlzylinder zwischen den Hall-Sonden eine Spannung

$$V' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \chi_L}{n e} H_a^2. \quad (18)$$

Diese Störspannung ist ebenso wie die Eigen-Hall-Spannung zu  $H_a^2$  und damit



zu  $J^2$  proportional. Vergleicht man jedoch (7) und (18) miteinander, indem man berücksichtigt, dass die Hall-Konstante im wesentlichen

$$R = \frac{1}{n e} \quad (19)$$

ist, so wird das Verhältnis

$$\frac{|V'|}{|V|} = \frac{1}{2} |\chi_L|.$$

Gewöhnlich bleibt also die von der Inhomogenität des Eigen-Magnetfeldes her-rührende Spannung  $V'$  grössenordnungsmässig mehr als  $10^5$ -mal kleiner als die Eigen-Hall-Spannung  $V$  und verschwindet damit dieser gegenüber.

### b) Inhomogene Stromverteilung (Skineffekt)

Bisher wurde stillschweigend angenommen, dass der Primärstrom  $J$  nur in axialer Richtung fliesst und seine Dichte  $j_z$  über den ganzen Querschnitt konstant ist. Abgesehen von Randstörungen ist dies in genügend langen Zylindern aus homogenem Material in einiger Entfernung von den Stromzuführungen sicher erfüllt, wenn Gleichstrom verwendet wird.

Bei Wechselstrom tritt der Skineffekt auf. Die Tiefe, in der die Stromdichte auf den  $e$ -ten Teil ihres Oberflächenwertes abgenommen hat, die Eindringtiefe, beträgt

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \pi \nu \sigma}}, \quad (20)$$

wo  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit bedeutet.

Für die Frequenz  $\nu = 50$  Hz ist bei Zimmertemperatur

in Kupfer mit  $\sigma_{\text{Cu}} = 0,588 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$      $\delta_{\text{Cu}} = 0,93 \text{ cm}$ ,

in Wismut mit  $\sigma_{\text{Bi}} = 0,855 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$      $\delta_{\text{Bi}} = 7,70 \text{ cm}$ .

Bleibt die Eindringtiefe gross gegen den Probenradius, was bei unseren Versuchen der Fall ist, so verteilt sich die Stromdichte praktisch gleichmässig über den Querschnitt, und der Skineffekt braucht nicht berücksichtigt zu werden.

## 5. Messungen an Wismut

Zur experimentellen Überprüfung erfolgten Messungen an Hohlzylindern ( $r_a = 0,4 \text{ cm}$ ,  $r_i = 0,25 \text{ cm}$ ) aus polykristallinem 99,97prozentigem Wismut in einem Petroleumbad sowie in flüssigem Stickstoff. Der Strom wurde dem 50-Hz-Netz über einen Reguliertransformator entnommen. Wir bestimmten

die Hall-Gleichspannungen aus den Anschlägen eines Gleichstromgalvanometers, das auf Wechselströme von 50 Hz noch deutlich, auf solche von 100 Hz fast nicht anspricht. Der isoelektrische Punkt wurde mit dem Potentiometer  $P$  so eingestellt, dass die Vibrationen des Galvanometers minimal wurden.

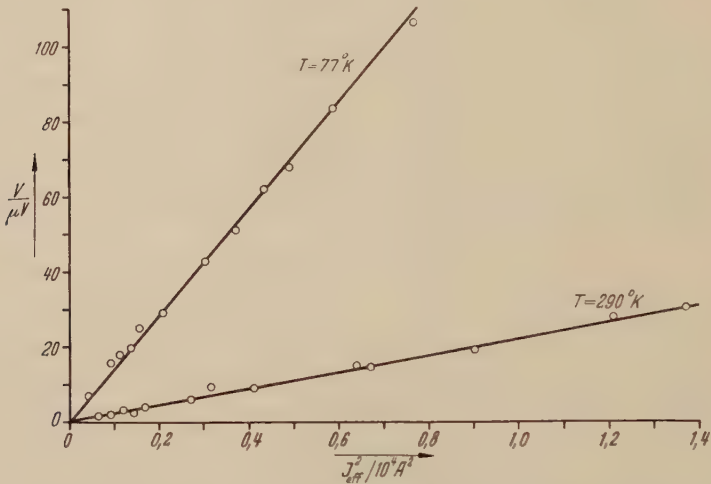


Fig. 3

Eigen-Hall-Spannung  $V$  in Funktion von  $J_{eff}^2$  für polykristallines Wismut.

In Figur 3 sind die aus mehreren Ablesungen gemittelten Eigen-Hall-Spannungen  $V$  über  $J_{eff}^2$  aufgetragen. In Bestätigung unserer Rechnungen ergeben sich durch den Ursprung des Koordinatensystems gehende Geraden, deren Auswertung folgende Hall-Konstanten liefert:

$$\text{für } T = 290^\circ \text{K, } R = -1,69 \frac{\text{cm}^3}{\text{As}},$$

$$\text{für } T = 77^\circ \text{K, } R = -10,85 \frac{\text{cm}^3}{\text{As}}.$$

Diese Resultate stehen in Übereinstimmung mit den älteren auf  $H = 0$  extrapolierten Messwerten von E. VAN EVERDINGEN<sup>1)</sup>, H. KAMERLINGH ONNES und B. BECKMAN<sup>2)</sup> sowie C. W. HEAPS<sup>3)</sup>.

Unsere Darlegungen zeigen, dass die ungestörte Messung des Hall-Effekts ohne äusseres Magnetfeld möglich ist. Die beschriebene Methode bietet besonders bei extremen Temperaturen manche Vorteile.

<sup>1)</sup> E. VAN EVERDINGEN, Comm. Leiden 53 (1899); 58 (1900).

<sup>2)</sup> H. KAMERLINGH ONNES und B. BECKMAN, Comm. Leiden 129 (1912); 132 (1912).

<sup>3)</sup> C. W. HEAPS, Phys. Rev. 29, 332 (1927); 30, 61 (1927).

### *Zusammenfassung*

In einem Voll- oder Hohlzylinder entsteht durch das Eigenmagnetfeld des durchfliessenden Stromes ein Hall-Effekt. Eine einfache Wechselstrommethode erlaubt die fehlerfreie Bestimmung der auftretenden Hall-Gleich- bzw. -Wechselspannung, was Messungen an polykristallinem Wismut bei 77° K und 290° K bestätigen.

### *Summary*

A current flowing through a cylindrical conductor gives rise to a Hall-effect due to its own magnetic field. A simple method for measuring the direct current and alternating current Hall-voltages is described. Results of measurements consistent with conventional determinations of Hall-coefficients are given for polycrystallin samples of bismuth at temperatures of 77° K and 290° K.

(Eingegangen: 6. September 1953.)

---

## Ein Gerät zur graphischen Bestimmung der Fermi-Grenzenergie in Halbleitern

VON EMANUEL MOOSER, Zürich<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Um die Ladungsträgerkonzentrationen in einem Halbleiter numerisch zu bestimmen, ist es notwendig, die Lage der Fermi-Grenzenergie  $\zeta$  zu kennen. Daher ist man bei der Interpretation von Messungen an Halbleitern immer wieder gezwungen, für eine vorgegebene Bänderstruktur den Temperaturverlauf der Fermi-Grenze zu ermitteln. Man benützt dazu eine zwischen den Ladungsträgerkonzentrationen bestehende Beziehung, welche zum Ausdruck bringt, dass die Gesamtladung eines Halbleiters im Gleichgewicht verschwindet. Aus dieser sogenannten «Neutralitätsbedingung» ergibt sich die Fermi-Grenzenergie als Funktion der die Bänderstruktur charakterisierenden Grössen – wir nennen sie im folgenden *Halbleiterparameter* – und der Temperatur. Die Neutralitätsbedingung lässt sich jedoch im allgemeinen nicht geschlossen nach  $\zeta$  auflösen, und man ist zu dessen Ermittlung auf graphische Methoden angewiesen.

Es hat nicht an Versuchen gefehlt,  $\zeta$  graphisch zu bestimmen. Wir erwähnen die Arbeiten von LEHOVEC und KEDESZY<sup>2)</sup> und von LANDSBERG, MACKAY und McRONALD<sup>3)</sup>, in denen jedoch nur die Ermittlung von  $\zeta$  in Störhalbleitern diskutiert wird. SHOCKLEY<sup>4)</sup> gibt eine Methode an, die sowohl für Stör- als auch für Eigenhalbleiter verwendet werden kann. Sie vernachlässigt aber Entar-

---

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> K. LEHOVEC und H. KEDESZY, J. appl. Phys. 22, 65 (1951).

<sup>3)</sup> P. T. LANDSBERG, R. W. MACKAY und A. D. McRONALD, Proc. Phys. Soc. 64, 476 (1951).

<sup>4)</sup> W. SHOCKLEY, *Electrons and Holes in Semiconductors* (Van Nostrand Co., New York 1950).



tungserscheinungen und ist mit ziemlich grossem zeichnerischem Aufwand verbunden, erfordert sie doch für jede Änderung eines der Halbleiterparameter oder der Temperatur eine neue graphische Darstellung.

Das hier zu beschreibende Gerät lehnt sich stark an die Shockleysche Methode an. Es gestattet indessen die Entartung der Ladungsträgergase in Valenz- und Leitungsband sowie in den Störniveaus zu berücksichtigen. Überdies schränkt es die zeichnerische Arbeit auf ein Minimum ein und stellt damit ein praktisches Hilfsmittel in der Hand des an Halbleitern interessierten Forschers dar.

## 2. Theoretische Grundlagen

Wir setzen im folgenden voraus, dass die Eigenwertdichten in der Nähe der Ränder von Valenz- und Leitungsband eines Halbleiters proportional der Eigenwertdichte freier Elektronen seien. In diesem Falle genügt es zur Kennzeichnung der Eigenwertdichten, die Freiheitszahlen der Löcher und Elektronen in ihren respektiven Bändern anzugeben, und die Bänderstruktur eines sowohl Akzeptoren als auch Donatoren enthaltenden Halbleiters ist eindeutig bestimmt durch folgende Grössen:

- $E_V$  = oberer Rand des Valenzbandes,
- $E_L$  = unterer Rand des Leitungsbandes,
- $f_p$  = Freiheitszahl der Löcher im Valenzband,
- $f_n$  = Freiheitszahl der Elektronen im Leitungsband,
- $E_{Ak}$  = Energie des  $k$ -ten Akzeptorniveaus,
- $E_{Di}$  = Energie des  $i$ -ten Donatorniveaus,
- $N_{Ak}$  = Anzahl Akzeptoren  $k$ -ter Art pro Kubikzentimeter,
- $N_{Di}$  = Anzahl Donatoren  $i$ -ter Art pro Kubikzentimeter.

Verteilt man die Ladungsträger entsprechend der Fermi-Statistik auf das durch obige Halbleiterparameter gegebene Eigenwertspektrum, so findet man für die Konzentration  $n_p$  der Löcher im Valenzband:

$$n_p = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{f_p^{3/2}} F\left( \frac{E_V - \zeta}{k T} \right) \quad (1)$$

und für die Konzentration  $n_n$  der Elektronen im Leitungsband:

$$n_n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{f_n^{3/2}} F\left( \frac{\zeta - E_L}{k T} \right). \quad (2)$$

Die Funktion  $F$  stellt dabei das bekannte, von McDougall und Stoner<sup>1)</sup> tabellierte Fermi-Integral

$$F(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1 + e^{x-\eta}} dx$$

<sup>1)</sup> J. McDougall und E. C. Stoner, Phil. Trans. Roy. Soc. [A] 237, 67 (1939).

dar. Im übrigen bedeuten  $m$  die Elektronenmasse,  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum,  $k$  die Boltzmannsche Konstante und  $T$  die Temperatur.

Die Zahl  $n_{A_k}$  der im  $k$ -ten Akzeptorniveau enthaltenen Löcher ergibt sich zu:

$$n_{A_k} = N_{A_k} \left( 1 + \exp \frac{\zeta - E_{A_k}}{k T} \right)^{-1}, \quad (3)$$

und die Zahl  $n_{D_i}$  der mit Elektronen besetzten Donatoren  $i$ -ter Art wird:

$$n_{D_i} = N_{D_i} \left( 1 + \exp \frac{E_{D_i} - \zeta}{k T} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Im Gleichgewicht stellt sich die Fermi-Grenze  $\zeta$  so ein, dass die Zahlen der über das betrachtete Eigenwertspektrum verteilten positiven und negativen Ladungen einander gleich sind. Zwischen den Konzentrationen  $n_p$ ,  $n_n$ ,  $n_{A_k}$ ,  $n_{D_i}$ ,  $N_{A_k}$  und  $N_{D_i}$  besteht daher folgende Beziehung:

$$n_p + \sum_i (N_{D_i} - n_{D_i}) = n_n + \sum_k (N_{A_k} - n_{A_k}). \quad (5)$$

Zur graphischen Bestimmung des Gleichgewichtswertes der Fermi-Grenzenergie genügt es, die rechte und die linke Seite der Neutralitätsbedingung (5) über dem vorübergehend als unabhängige Veränderliche betrachteten  $\zeta$  aufzutragen. Im Schnittpunkt der beiden so erhaltenen Kurven ist die Neutralitätsbedingung erfüllt: das zugehörige  $\zeta$  stellt den gesuchten Gleichgewichtswert dar.

Es ist äusserst unbequem,  $\zeta$  in dieser Weise zu ermitteln, da zu jedem speziellen Bänderschema und zu jeder Temperatur eine neue Zeichnung angefertigt werden muss. Nun ist aber der funktionelle Zusammenhang zwischen den Ladungsträgerkonzentrationen (1) bis (4) einerseits und den Halbleiterparametern, der Temperatur und der Fermi-Energie andererseits derart, dass die Logarithmen der Konzentrationen (1) bis (4), aufgetragen über  $\zeta/kT$ , Kurven universeller Form sind. Jede Änderung eines der Halbleiterparameter oder der Temperatur bewirkt lediglich eine Translation der Kurven gegeneinander. Bevor wir diese Tatsache ausnützen, um die Neutralitätsbedingungen in ihrer allgemeinsten Form (5) graphisch nach  $\zeta$  aufzulösen, wollen wir sie zur  $\zeta$ -Bestimmung in nichtentarteten Eigenhalbleitern verwenden. Dann werden wir eine mögliche Entartung der Ladungsträrgase in Valenz- und Leitungsband berücksichtigen, um zum Schluss den Einfluss von Störniveaus auf die Lage von  $\zeta$  zu diskutieren.

### 3. Der nichtentartete Eigenhalbleiter

Für einen Eigenhalbleiter lautet die Neutralitätsbedingung:

$$n_p = n_n. \quad (5a)$$

Da die beiden Konzentrationen  $n_p$  und  $n_n$  nur von den vier Parametern  $E_v$ ,

$E_L$ ,  $f_p$  und  $f_n$  abhängen, wird in diesem Falle die Bestimmung der Fermi-Grenze als Funktion der Halbleiterparameter und der Temperatur stark vereinfacht. Überdies lassen sich  $n_p$  und  $n_n$  bei vorausgesetzter Nichtentartung näherungsweise wie folgt schreiben:

$$n_p = 2 \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{f_p^{3/2}} \exp \frac{E_V - \zeta}{k T} \quad (1a)$$

und

$$n_n = 2 \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{f_n^{3/2}} \exp \frac{\zeta - E_L}{k T}. \quad (2a)$$

Mit diesen Näherungen kann (5a) explizit nach  $\zeta$  aufgelöst werden. Man findet:

$$\zeta = \frac{E_V + E_L}{2} + \frac{k T}{2} \ln \left( \frac{f_n}{f_p} \right)^{3/2}, \quad (6)$$

und es ergibt sich somit für den nichtentarteten Eigenhalbleiter die Möglichkeit, die graphisch ermittelten  $\zeta$ -Werte mit den berechneten zu vergleichen.

Um nun zur graphischen Bestimmung des Gleichgewichtswertes der Fermi-Energie überzugehen, logarithmieren wir zunächst die Konzentrationen  $n_p$  und  $n_n$ . Aus (1a) und (2a) folgt:

$$\log n_p = \frac{3}{2} \log \left[ 2^{2/3} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right) \right] - \frac{3}{2} \log f_p + \left( \frac{E_V}{k T} - \frac{\zeta}{k T} \right) \log e \quad (7)$$

und

$$\log n_n = \frac{3}{2} \log \left[ 2^{2/3} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right) \right] - \frac{3}{2} \log f_n + \left( \frac{\zeta}{k T} - \frac{E_L}{k T} \right) \log e. \quad (8)$$

Daraus erkennt man, dass die Logarithmen  $\log n_p$  und  $\log n_n$ , aufgetragen über  $\zeta/kT$ , für jede fest vorgegebene Temperatur Geraden sind, deren Steilheiten unabhängig von den Halbleiterparametern  $-\log e$  und  $+\log e$  betragen. Die Ordinatenachsenabschnitte der Geraden ergeben sich zu:

$$\frac{3}{2} \log \left[ 2^{2/3} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right) \right] - \frac{3}{2} \log f_p + \frac{E_V}{k T} \log e \quad (9)$$

und

$$\frac{3}{2} \log \left[ 2^{2/3} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right) \right] - \frac{3}{2} \log f_n - \frac{E_L}{k T} \log e. \quad (10)$$

Jetzt spannen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf, über dessen Abszissenachse für verschiedene Temperaturen  $T_1, T_2, T_3, \dots$  Funktionsleitern  $x = \zeta/kT_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) und auf dessen Ordinatenachse die logarithmische Leiter  $y = \log n$  aufgetragen sind. Stellt man in diesem Koordinatensystem  $n_p$  und  $n_n$  als Funktionen von  $\zeta$  für die Temperaturen  $T_i$  graphisch dar, so erhält man nach dem oben Gesagten zwei Scharen paralleler Geraden.



In Figur 1 sind zwei solche Geradenscharen für einen Halbleiter mit den Parameterwerten

$$E_L = -E_V = +0,5 \text{ eV}^1), \quad f_p = f_n = 1$$

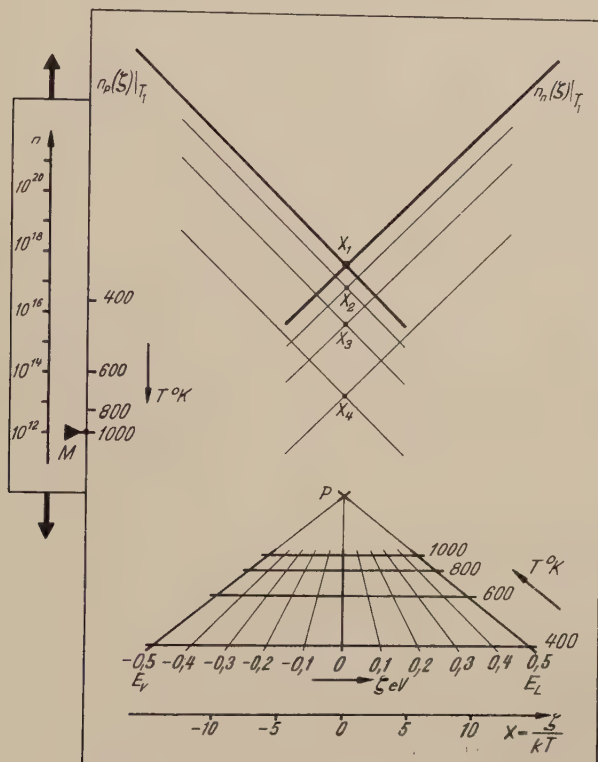


Fig. 1

eingezeichnet. Für die Temperaturen  $T_i$  wurden dabei die Werte

$$T_1 = 1000^\circ \text{K}, \quad T_2 = 800^\circ \text{K}, \quad T_3 = 600^\circ \text{K} \quad \text{und} \quad T_4 = 400^\circ \text{K}$$

angenommen.

Zur Anordnung der Funktionsleitern  $x = \zeta/kT_i$  in Figur 1 sei folgendes bemerkt: Die Abstände der zu den verschiedenen Temperaturen  $T_i$  gehörigen Leitern von einem festen Punkt  $P$  aus wurden so gewählt, dass sie proportional zu  $1/T_i$  sind. Dadurch kommen gleiche  $\zeta$ -Werte der verschiedenen Leitern auf Geraden durch den Punkt  $P$  zu liegen, die Funktionsleitern lassen sich leicht überblicken, und  $\zeta$  kann bequem abgelesen werden.

<sup>1)</sup> Im folgenden werden wir stets  $E_L = -E_V$  setzen und damit den Nullpunkt der Energie in die Mitte zwischen Valenz- und Leitungsband legen.

In jedem der Schnittpunkte  $X_i$  in Figur 1 ist:

$$n_p(\zeta)|_{T_i} = n_n(\zeta)|_{T_i}.$$

Das zu einem solchen Punkt gehörige, auf der Leiter  $x = \zeta/k T_i$  abgelesene  $\zeta$  stellt somit den gesuchten Gleichgewichtswert der Fermi-Grenze für die Temperatur  $T_i$  dar. In dem in Figur 1 dargestellten Beispiel sind die Gleichgewichtswerte von  $\zeta$  alle gleich Null, das heisst, es liegt für alle Temperaturen in der Mitte des verbotenen Energiegebietes zwischen Valenzband und Leitungsband. Das rührt nach (6) davon her, dass hier  $f_p = f_n$  ist.

Auf der Leiter  $y = \log n$  lassen sich die den Temperaturen  $T_i$  entsprechenden Gleichgewichtskonzentrationen  $n_p = n_n$  als Ordinaten der Punkte  $X_i$  ablesen.

Für das folgende ist es bequemer, die beiden Geradenscharen  $n_p(\zeta)|_{T_i}$  und  $n_n(\zeta)|_{T_i}$  durch ein einziges Geradenpaar darzustellen (in Figur 1 stark ausgezogen). Um trotzdem die zu verschiedenen Temperaturen gehörigen Ladungsträgerkonzentrationen auf der  $y$ -Leiter ablesen zu können, gehen wir wie folgt vor: Auf dem linken Rand des die Geraden  $n_p(\zeta)$  und  $n_n(\zeta)$  enthaltenden Blattes tragen wir von einem beliebigen Nullpunkt aus die Ordinatenachsenabschnitte (9) oder (10) von oben nach unten ab, und zwar für

$$E_L = -E_V = 0,5 \text{ eV}, \quad f_p = f_n = 1$$

und für die Temperaturen

$$T_1 = 1000^\circ \text{K}, \quad T_2 = 800^\circ \text{K}, \quad T_3 = 600^\circ \text{K} \quad \text{und} \quad T_4 = 400^\circ \text{K}.$$

Die Endpunkte dieser Strecken beziffern wir mit den zugehörigen Temperaturen  $T_i$  und erhalten so eine Funktionsleiter  $y' = f(T)$ . Nun legen wir einen die Leiter  $y = \log n$  tragenden Streifen so an die  $y'$ -Leiter, dass der zu  $1000^\circ \text{K}$  gehörige  $n$ -Wert auf die Höhe des Schnittpunktes  $X_1$  zu liegen kommt. In dieser Lage bringen wir auf dem  $y$ -Streifen gegenüber dem Teilstrich  $1000^\circ \text{K}$  der  $y'$ -Leiter eine Marke  $M$  an (Figur 1). Verschieben wir jetzt den  $y$ -Streifen so lange, bis  $M$  auf dem Teilstrich  $T_i$  der  $y'$ -Leiter steht, so lässt sich der der Temperatur  $T_i$  entsprechende  $n$ -Wert gegenüber dem Schnittpunkt  $X_1$  auf der  $y$ -Skala ablesen.

Das Gerät, wie es bis dahin beschrieben wurde, erlaubt nur, die Fermi-Grenze und die Ladungsträgerkonzentrationen eines ganz speziellen Eigenhalbleiters mit den Parameterwerten

$$E_L = -E_V = 0,5 \text{ eV} \quad \text{und} \quad f_p = f_n = 1$$

zu bestimmen. Mit einer kleinen Ergänzung lassen sich damit aber  $n_p = n_n$  und  $\zeta$  auch für Eigenhalbleiter ermitteln, deren Bandränder  $E_L$  und  $E_V$  beliebige andere Werte besitzen. Nach (7) und (8) sind nur die  $y$ -Achsenabschnitte der Geraden  $n_p(\zeta)$  und  $n_n(\zeta)$  von  $E_V$  und  $E_L$  abhängig. Wir können daher folgender-

massen zu andern Bandrandenergien übergehen: Neben der schon in Figur 1 eingezeichneten, dem Werte  $E_L = -E_V = 0,5 \text{ eV}$  entsprechenden  $y'$ -Leiter tragen wir für verschiedene andere Werte von  $E_L = -E_V$  weitere solche Leitern auf (Figur 2). Wenn wir jetzt die zum Zeiger ausgezogene Marke  $M$  zum Bei-

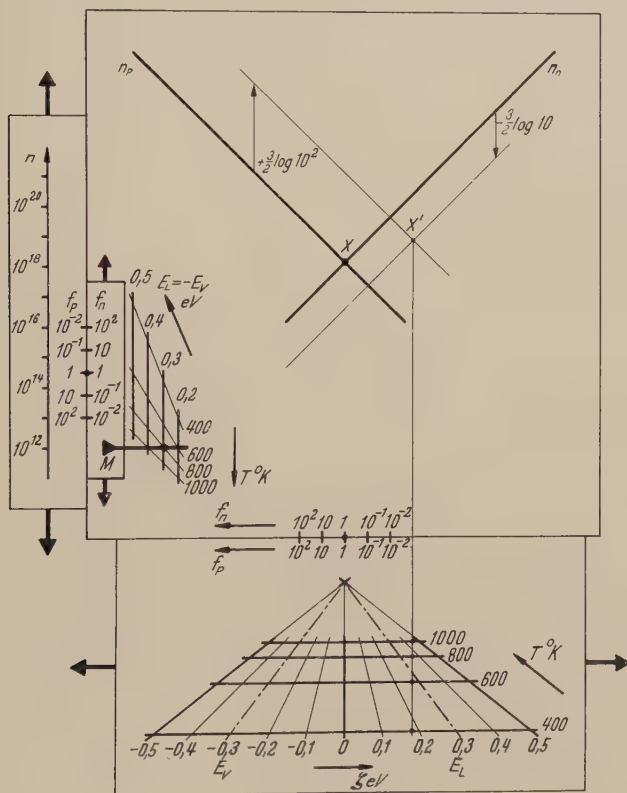


Fig. 2

spiel über den Teilstrich  $800^\circ \text{K}$  der zu  $E_L = -E_V - 0,3 \text{ eV}$  gehörigen  $y'$ -Leiter schieben (Figur 2), so lesen wir als Ordinate des Punktes  $X$  auf der Skala  $y = \log n$  die Konzentrationen

$$n_p = n_n = 1,4 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

eines Halbleiters mit der Aktivierungsenergie

$$\Delta E = E_L - E_V = 0,6 \text{ eV} \quad \text{und mit} \quad f_p = f_n = 1$$

für die Temperatur  $T = 800^\circ \text{K}$  ab. Wegen  $f_p = f_n$  liegt  $\zeta$  auch hier in der Mitte zwischen Valenz- und Leitungsband.



Zum Schlusse des Abschnittes über nichtentartete Eigenhalbleiter wollen wir das Auftreten beliebiger Freiheitszahlen zulassen. Die Logarithmen der Freiheitszahlen gehen als additive Glieder in die Ordinatenachsenabschnitte (9) und (10) ein. Variieren wir  $f_p$  und  $f_n$ , so verschieben sich daher die Geraden  $n_p(\zeta)$  und  $n_n(\zeta)$  parallel zu sich selbst nach oben oder nach unten. Da jetzt im allgemeinen  $f_p \neq f_n$  ist, sind die Verschiebungen der beiden Geraden verschiedenen voneinander, und man erkennt, dass Ordinate und Abszisse des Schnittpunktes  $X$  Funktionen von  $f_p$  und  $f_n$  sind. (Vergleiche dazu Figur 2. Die beiden schwach ausgezogenen Geraden, welche sich im Punkte  $X'$  schneiden, unterscheiden sich nur durch ihre Freiheitszahlen  $f_p = 10^{-2}$  und  $f_n = 10$  von den stark ausgezogenen Geraden, für die  $f_p = f_n = 1$  ist.)

Um trotzdem das stark ausgezogene Geradenkreuz in Figur 2 beibehalten zu können, das heisst um  $X'$  in  $X$  zurückzuführen, müssen wir sowohl die  $y$ - als auch die  $x$ -Leitern verschiebbar anordnen. Dabei ist zu beachten, dass jetzt die Verschiebung der  $y$ -Leiter in zwei Komponenten zerfällt: eine mit Temperatur und Bandrandenergie variierende und eine von den Freiheitszahlen abhängige. Während die Translation der  $y$ -Leiter mit Temperatur und Bandrandenergie in der oben beschriebenen Weise an den  $y'$ -Leitern eingestellt werden kann, berücksichtigen wir die freiheitszahlenabhängige Verschiebung dadurch, dass wir die Marke  $M$  beweglich am  $y$ -Streifen anbringen (Figur 2).

Um ein Mass zu haben dafür, wie weit sich bei einer Variation von  $f_p$  und  $f_n$  die Marke  $M$  gegenüber dem  $y$ -Streifen verschiebt, zeichnen wir auf diesem eine Leiter  $y'' = -(3/4) \log f_p^1$  und ihr gegenüber auf dem die Marke  $M$  tragenden Streifen eine Leiter  $y''' = (3/4) \log f_n$ . Wir wählen dabei die Nullpunkte der beiden Leitern so, dass sie für  $f_p = f_n = 1$  zusammenfallen.

Die Verschiebung der  $x$ -Leitern als Funktion der Freiheitszahlen messen wir an zwei Leitern

$$x' = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\log f_p}{\log e} \quad \text{und} \quad x'' = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\log f_n}{\log e},$$

die einander gegenüberliegend auf dem  $x$ -Streifen bzw. dem Grundblatt aufgetragen sind und deren Nullpunkte für  $f_p = f_n = 1$  ebenfalls zusammenfallen.

Jetzt stellen wir den Teilstrich  $f_p = 10^{-2}$  der  $x'$ - bzw.  $y''$ -Skala auf den Teilstrich  $f_n = 10$  der  $x''$ - bzw.  $y'''$ -Skala. In dieser Lage fixieren wir die  $x$ -Leiter am Grundblatt und die Marke  $M$  am  $y$ -Streifen. Schliesslich verschieben wir den  $y$ -Streifen zusammen mit der Marke  $M$  so lange, bis diese auf dem Teilstrich  $800^\circ \text{K}$  der zu  $E_L = -E_V = 0,3 \text{ eV}$  gehörigen  $y'$ -Leiter steht (Figur 3). Die Koordinaten

$$n_p = n_n = 8,0 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} \quad \text{und} \quad \zeta = 0,36 \text{ eV}$$

<sup>1)</sup> Der Faktor  $3/4$  tritt deshalb auf, weil sich bei einer Translation zum Beispiel der Geraden  $n_p(\zeta)$  um  $-(3/2) \log f_p$  der Schnittpunkt  $X$  nur um  $-(3/4) \log f_p$  verschiebt.

des Schnittpunktes  $X^1$ ) in Figur 3 stellen dann die Ladungsträgerkonzentrationen bzw. die Fermi-Grenzenergie eines nichtentarteten Eigenhalbleiters mit den Parametern

$$E_L = -E_V = 0,3 \text{ eV}, \quad f_p = 10^{-2} \quad \text{und} \quad f_n = 10$$

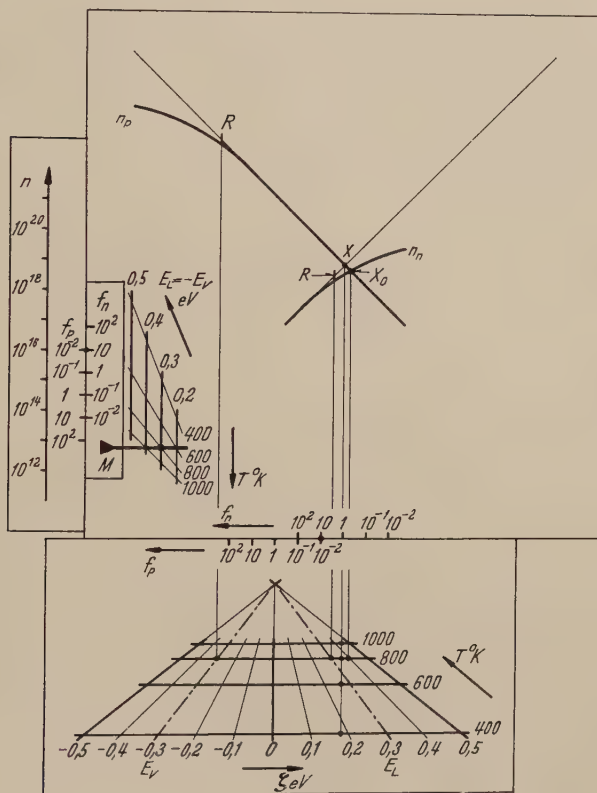


Fig. 3

bei einer Temperatur  $T = 800^\circ \text{K}$  dar. (Vergleiche auch Figur 2. Dort hat der Punkt  $X'$  diese Koordinaten.) Die Fermi-Grenze liegt hier, wie es (6) mit  $f_p \neq f_n$  verlangt, nicht mehr in der Mitte zwischen Valenz- und Leitungsband. Im übrigen beachte man, dass sich  $\zeta$  aus Figur 3 sofort für jede Temperatur  $T_i$  auf der zugehörigen Leiter  $\alpha = \zeta/k T_i$  herauslesen lässt, weil die Abszisse von  $X$  temperaturunabhängig ist.

<sup>1</sup>) Wie unten gezeigt wird, ist die Neutralitätsbedingung bei berücksichtigter Entartung in Punkte  $X_0$  der Figur 3 erfüllt.

#### 4. Der entartete Eigenhalbleiter

Die im letzten Abschnitt für die Ladungsträgerkonzentrationen verwendeten Näherungen (1a) und (2a) sind nur gültig, solange

$$\zeta > E_V + kT \quad \text{bzw.} \quad \zeta < E_L - kT.$$

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, liegt  $\zeta$  insbesondere in einem der beiden Bänder, so berechnet sich die Ladungsträgerkonzentration des betreffenden Bandes nach (1) bzw. (2). Mit den McDougall-Stonerschen Werten des

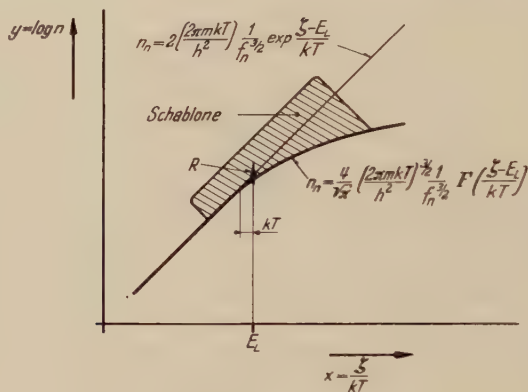


Fig. 4

Fermi-Integrale  $F$  können wir zum Beispiel  $n_n$  als Funktion von  $\zeta$  in dem oben eingeführten Koordinatensystem graphisch darstellen und erhalten den in Figur 4 wiedergegebenen Kurvenverlauf. Man erkennt, dass sich die Kurve  $n_n(\zeta)$  für  $\zeta < E_L - kT$  tatsächlich asymptotisch der Geraden (2a) nähert und grosse Abweichungen (Entartung) erst oberhalb  $\zeta = E_L$  auftreten.

In dem von uns gewählten Koordinatensystem stellt  $n_n(\zeta)$  eine Kurve fester Form dar: jede Änderung der Parameter  $E_L$  und  $f_n$  sowie der Temperatur bewirkt lediglich eine Translation der Kurve, ihre Form aber bleibt erhalten. Wir können daher vom «Entartungsbogen» eine Schablone herstellen (in Figur 4 schraffiert eingezeichnet) und müssen nur noch seine Lage als Funktion der Halbleiterparameter und der Temperatur bestimmen. Dazu zeichnen wir die Asymptote des Entartungsbogens in der Schablone ein und markieren darauf den Punkt  $R$ , für den  $\zeta = E_L$  ist<sup>1)</sup>. Wenn wir jetzt auf der Geraden  $n_n(\zeta)$  des Grundblattes unseres Gerätes den Punkt  $\zeta = E_L$  ebenfalls markieren, so können wir die Schablone sofort in der richtigen Lage anlegen und den Entartungsbogen einzeichnen (Figur 3).

<sup>1)</sup> In diesem Punkt ist das Verhältnis von nichtentarteter zu entarteter Elektronenkonzentration konstant und unabhängig von Temperatur und Halbleiterparameter.



Die Abweichung der Löcherkonzentration  $n_p$  von der im Grundblatt eingetragenen Geraden (1a) bei eintretender Entartung lässt sich mit derselben Schablone zeichnen. Wir müssen einfach die Asymptote der umgeklappten Schablone so auf die Gerade (1a) legen, dass der Punkt  $R$  mit dem Punkt  $\zeta = E_V$  zusammenfällt.

In Figur 3 sind die Punkte  $X$  und  $X_0$  eingezeichnet, in denen die Neutralitätsbedingung eines Eigenhalbleiters bei vernachlässigter ( $X$ ) bzw. berücksichtigter ( $X_0$ ) Entartung erfüllt ist. Da  $\zeta$  im Leitungsband liegt, ist einerseits die Entartung des Elektronengases schon ziemlich weit fortgeschritten, andererseits aber gilt sicher  $\zeta > E_V + kT$ , das heisst das Löchergas im Valenzband ist nicht entartet. In der Tat erkennt man in Figur 3, dass der Entartungsbogen der Löcherkonzentration so weit vom Schnittpunkt  $X_0$  entfernt ist, dass er dessen Lage nicht beeinflusst.

Mit sinkender Temperatur wandern die Punkte  $\zeta = E_V$  bzw.  $\zeta = E_L$  auf den  $\kappa$ -Leitern nach aussen. Damit entfernen sich die beiden Entartungsbogen vom Schnittpunkt des Geradenkreuzes: die Entartung verschwindet bei tiefen Temperaturen.

## 5. Der Störhalbleiter

Wir gehen nun über zur Bestimmung der Fermi-Energie in Halbleitern, welche ein oder mehrere Störniveaus enthalten. Die allgemeinste hier auftretende Neutralitätsbedingung ist von der Form (5), und wir fragen daher als erstes nach dem Verlauf der Kurven

$$N_A - n_A = f(\zeta) \quad \text{bzw.} \quad N_D - n_D = g(\zeta).$$

Nach (4) ist zum Beispiel die Zahl  $N_D - n_D$  der ionisierten Donatoren:

$$N_D - n_D = N_D \left[ 1 - \left( 1 + \exp \frac{E_D - \zeta}{kT} \right)^{-1} \right] = N_D \left( 1 + \exp \frac{\zeta - E_D}{kT} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Falls  $\zeta \ll E_D$ , das heisst, falls  $\zeta$  tief unterhalb des Donatorniveaus liegt, gilt näherungsweise:

$$N_D - n_D \approx N_D. \quad (12)$$

Andererseits erhält man mit  $\zeta \gg E_D$ :

$$N_D - n_D \approx N_D \exp \frac{E_D - \zeta}{kT}. \quad (13)$$

Aufgetragen in unserem Koordinatensystem stellen die beiden Kurven (12) und (13) Geraden dar, die sich im Punkte  $S(\zeta = E_D, n = N_D)$  schneiden und denen sich die Kurve (11) für  $\zeta \ll E_D$  bzw.  $\zeta \gg E_D$  asymptotisch nähert (Figur 5).

Während die Gerade (12) horizontal verläuft, besitzt die Gerade (13) die Steilheit  $-\log e$ , das heisst, sie ist parallel zu der im nichtentarteten Fall den Verlauf der Löcherkonzentration wiedergebenden Geraden (1a).

Wie oben diejenige des Entartungsbogens bleibt auch die Form der Kurve (11) bei einer Änderung der Halbleiterparameter ( $E_D$ ,  $N_D$ ) und der Temperatur erhalten. Wir können daher von der Kurve  $N_D - n_D$  ebenfalls eine Schablone anfertigen (in Figur 5 schraffiert eingezeichnet). Markieren wir die beiden Asymptoten (12) und (13) und insbesondere deren Schnittpunkt S auf der

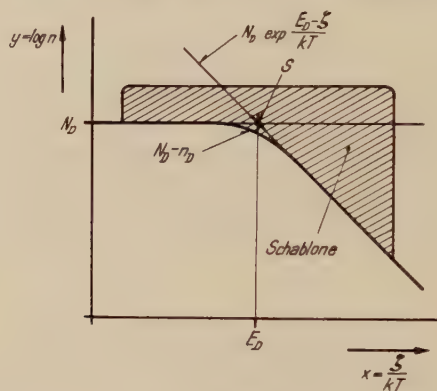


Fig. 5

Schablone, so lässt sich damit die Kurve  $N_D - n_D = g(\zeta)$  sofort und für beliebige Werte von  $E_D$ ,  $N_D$  und  $T$  in der richtigen Lage im Grundblatt unseres Gerätes einzeichnen.

Die gleiche Schablone können wir benutzen, um den Verlauf der Zahl  $N_A - n_A$  der ionisierten Akzeptoren als Funktion der Fermi-Grenze zu zeichnen. Wir müssen einfach die horizontale Asymptote der umgeklappten Schablone auf die Gerade  $n = N_A$  legen, und zwar so, dass der Punkt S auf den Punkt mit den Koordinaten  $\zeta = E_V$ ,  $n = N_A$  fällt.

Nachdem wir den Verlauf von  $N_A - n_A$  und von  $N_D - n_D$  kennen, wollen wir mit unserem Gerät die Fermi-Grenze in einem Überschusshalbleiter mit den Parametern:

$$E_L = -E_V = 0,4 \text{ eV}, \quad f_p = 1, \quad f_n = 10,$$

$$E_D = 0,25 \text{ eV} \quad \text{und} \quad N_{D_1} = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

bei einer Temperatur  $T = 600^\circ \text{ K}$  bestimmen (Figur 6). Zur Auflösung der Neutralitätsbedingung, welche hier lautet:

$$n_n = n_p + N_D - n_D, \quad (5b)$$

stellen wir zunächst an den verschiedenen Leitern des Gerätes die die Eigenleitung charakterisierenden Parameter und die Temperatur ein. Nachdem wir zur Vervollständigung des Gerätes ein das ganze Grundblatt überdeckendes, mattiertes Zelluloidblatt fest an der Leiter  $y = \log n$  angebracht haben, zeich-

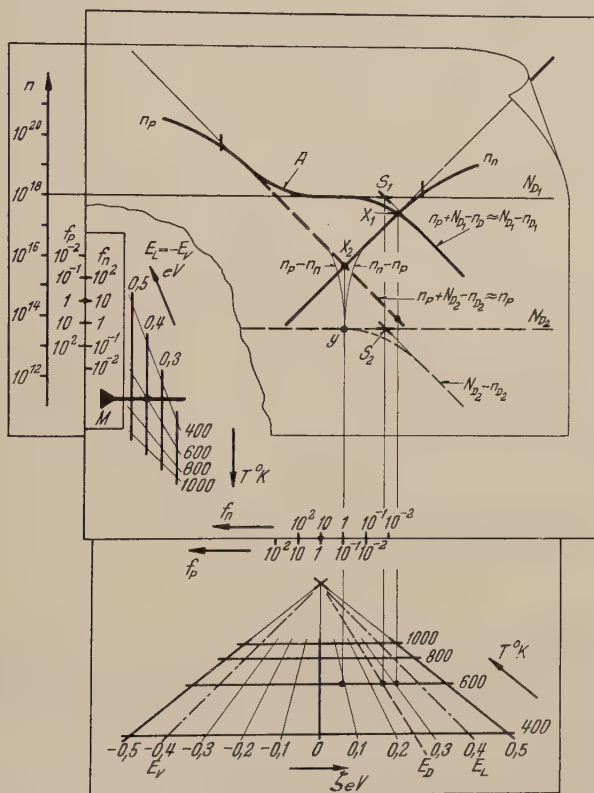


Fig. 6

nen wir auf diesem die Gerade  $n = N_{D_1}$  und markieren darauf den Punkt  $S_1(E_D, N_{D_1})$ . Jetzt können wir mit unserer Schablone die Kurve  $N_{D_1} - n_{D_1}$  auf das Deckblatt übertragen. Sie schneidet die Kurve  $n_n$  im Punkte  $X_1$  für den

$$n_n = N_{D_1} - n_{D_1}.$$

Da der zur Abszisse des Punktes  $X_1$  gehörige Wert von  $n_p$  vernachlässigbar klein ist, gilt in der Umgebung von  $X_1$ :

$$n_p + N_{D_1} - n_{D_1} \approx N_{D_1} - n_{D_1}.$$

Das bedeutet aber, dass im Punkte  $X_1$  die Neutralitätsbedingung (5b) erfüllt ist. Wir finden daher den Gleichgewichtswert

$$\zeta = 0,31 \text{ eV}$$

der Fermi-Grenzenergie als Abszisse von  $X_1$ , und als Ordinate lesen wir auf der  $y$ -Leiter die Konzentrationen

$$n_n \approx N_{D_1} - n_{D_1} = 2,9 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

ab. Die Gleichgewichtskonzentration  $n_p$  ( $\zeta = 0,31 \text{ eV}$ ) der Löcher ergibt sich zu:

$$n_p = 9,0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}.$$

Es sei darauf hingewiesen, dass im allgemeinen grosse Teile der Kurve  $n_p + N_D - n_D$  durch  $n_p$  und durch  $N_D - n_D$  hinreichend approximiert werden. Nur dort, wo  $n_p \approx N_D - n_D$  ist, müssen wir den Verlauf von  $n_p + N_D - n_D$  neu bestimmen. Falls an dieser Stelle aber einerseits  $n_p$  nicht entartet und andererseits  $N_D - n_D \approx N_D$  ist, kann die Summenkurve mit der gedrehten ( $N_D - n_D$ )-Schablone gezeichnet werden (Bogen  $A$  in Figur 6). Analoges gilt im Falle eines Mangelleiters für die Kurve  $n_n + N_A - n_A$ .

Als zweites Beispiel ermitteln wir die Fermi-Energie in einem Überschussleiter, welcher sich nur durch die Konzentration

$$N_{D_2} = 4,0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$

seiner Donatoren von dem eben betrachteten unterscheidet. Wir zeichnen die Kurve  $N_{D_2} - n_{D_2}$  in unser Gerät ein (Figur 6) und sehen, dass auf ihrem ganzen Verlauf

$$N_{D_2} - n_{D_2} \ll n_p$$

ist. Daher können wir die Neutralitätsbedingung (5b) näherungsweise wie folgt schreiben:

$$n_p + N_{D_2} - n_{D_2} \approx n_p = n_n.$$

Diese Bedingung ist im Schnittpunkt  $X_2$  der Kurven  $n_p$  und  $n_n$  erfüllt, und wir finden einen Gleichgewichtswert der Fermi-Grenze von

$$\zeta = 0,09 \text{ eV}.$$

Die zugehörigen Löcher- und Elektronenkonzentrationen sind:

$$n_p = n_n = 5,5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3},$$



und die Zahl der ionisierten Donatoren ergibt sich als Ordinate des Punktes Y zu:

$$N_{D_1} - n_{D_1} = 4,0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}.$$

Die beiden in Figur 6 behandelten Beispiele stellen zwei Extremfälle dar: Während die Ladungsträgerkonzentrationen des zuerst betrachteten Halbleiters bei der Temperatur  $T = 600^\circ \text{K}$  vollständig durch die Zahl der Donatoren und durch deren energetischen Abstand vom Leitungsband bestimmt sind, ergeben sie sich im zweiten Fall allein aus den die Eigenleitung kennzeichnenden Größen.

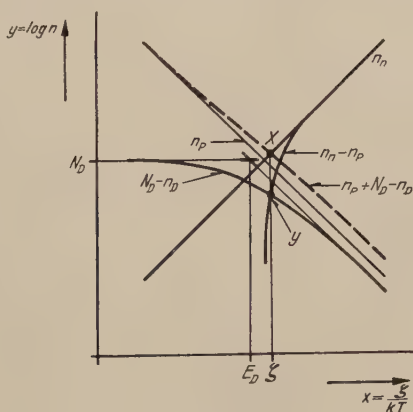


Fig. 7

Nun gibt es für jeden Störhalbleiter einen Temperaturbereich, in dem sich Stör- und Eigenleitung überdecken. In diesem Übergangsgebiet kommt es vor, dass sich zum Beispiel bei einem Überschussleiter die Kurve  $n_n$  und die Summenkurve  $n_p + N_D - n_D$  an einer Stelle schneiden, an welcher der nach rechts unten abfallende Ast der Kurve  $N_D - n_D$  beinahe mit der Geraden  $n_p$  zusammenfällt (Figur 7). Um den Schnittpunkt X zu finden, in welchem die Neutralitätsbedingung (5b) erfüllt ist, müssen wir dann die Kurve  $n_p + N_D - n_D$  Punkt für Punkt zeichnen. Wir können uns diese Arbeit jedoch ersparen, wenn wir die Kurve  $n_n - n_p$ <sup>1)</sup> im Geradenkreuz des Grundblattes einzeichnen und die Neutralitätsbedingung in der Form

$$n_n - n_p = N_D - n_D \quad (5c)$$

nach  $\zeta$  auflösen. Die Bedingung (5c) ist im Punkte Y der Figur 7 erfüllt, und wir erkennen, dass X und Y dieselbe Abszisse besitzen, das heisst auf dasselbe

<sup>1)</sup> Die Kurve  $n_n - n_p$  behält ihre Form unabhängig von Halbleiterparametern und Temperatur bei, solange  $n_p$  und  $n_n$  nicht entartet sind.

$\zeta$  führen. Da Analoges auch für einen Mangelleiter gilt — hier müssen wir  $n_p - n_n$  mit  $N_A - n_A$  schneiden —, haben wir die Kurven  $n_n - n_p$  und  $n_p - n_n$  im Grundblatt des Gerätes eingezeichnet (Figuren 6 und 8). Man beachte, dass der Punkt Y in Figur 6 die Neutralitätsbedingung (5c) befriedigt.

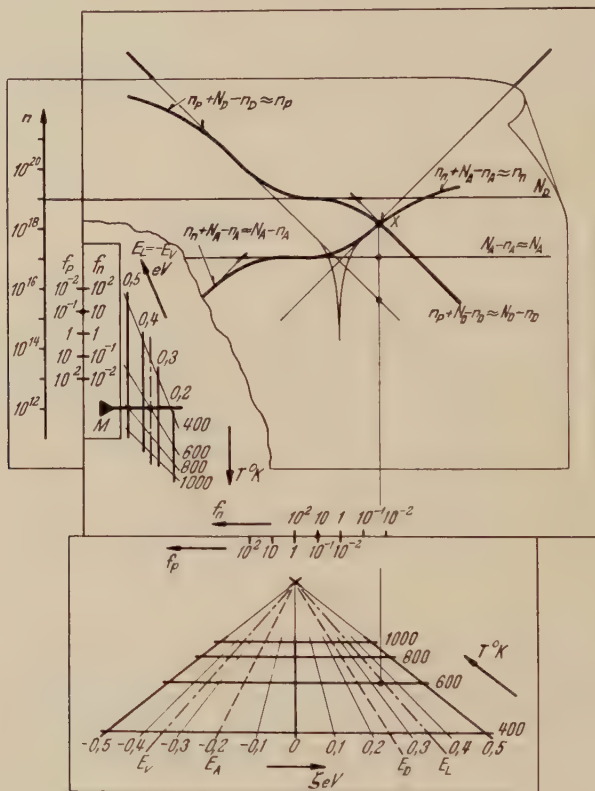


Fig. 8

Als letztes Beispiel haben wir in Figur 8 die Fermi-Grenze in einem sowohl Donatoren als auch Akzeptoren enthaltenden Störhalbleiter bestimmt. Die Parameter des betrachteten Halbleiters sind:

$$E_L = -E_V = 0,35 \text{ eV}, \quad f_p = 10^{-1}, \quad f_n = 10,$$

$$E_A = -0,2 \text{ eV}, \quad E_D = 0,25 \text{ eV}, \quad N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}, \quad N_D = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

und führen bei einer Temperatur  $T = 600^\circ \text{ K}$  auf eine Fermi-Grenzenergie:

$$\zeta = 0,34 \text{ eV}.$$

Die Ladungsträgerkonzentrationen aber werden:

$$n_p = 3,5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3},$$

$$n_n = 1,3 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3},$$

$$N_A - n_A = 1,0 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3},$$

$$N_D - n_D = 1,4 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}.$$

Damit ist gezeigt, dass das beschriebene Gerät auch für komplizierte Halbleiter rasch und bequem Fermi-Energie und Ladungsträgerkonzentrationen liefert.

## 6. Schluss

Nachdem wir an einigen Beispielen Konstruktion und Handhabung des  $\zeta$ -Bestimmungsgerätes erläutert haben, bleibt uns zum Schluss, kurz dessen Vorteile aufzuzählen:

1. einfache und billige Konstruktion,
2. bequeme Handhabung,
3. rasches Ermitteln von Fermi-Energie und Ladungsträgerkonzentrationen,
4. universelle Verwendungsmöglichkeit,
5. Berücksichtigung der Entartung.

Diesen Vorzügen steht als einziger Nachteil die Tatsache gegenüber, dass der mit dem Gerät überdeckte Temperaturbereich wegen der temperaturabhängigen Länge der  $x$ -Leitern beschränkt ist. Dieser Nachteil kann indessen leicht durch Anfertigung auswechselbarer Skalen behoben werden.

Ich nehme gerne die Gelegenheit wahr, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. BUSCH, für Anregungen, die zur Konstruktion des Gerätes geführt haben, und Herrn Dr. J. WIELAND für viele wertvolle Diskussionen herzlich zu danken. Mein Dank gehört ferner der Eidgenössischen Kommission zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung für die Bereitstellung finanzieller Mittel.

## Summary

A computer is described which allows the Fermi-energy in a semiconductor to be calculated as a function of temperature and of the quantities characterizing the bandstructure. At the same time as determining the Fermi-energy the computer gives the temperature dependence of the concentration of charge carriers in any semiconductor, whatever the degree of degeneracy of the charge carriers in the valence- and conduction band and in impurity levels.

(Eingegangen: 6. September 1953.)

# Beeinflussung der Charakteristik einer Cs-Sb-Photokathode durch Zusatz fremder Elemente

VON NORBERT SCHAETTI, Zürich<sup>1)</sup>

## I. Der Dunkelstrom von Photozellen mit Sekundärelektronenvervielfachern

In zwei Arbeiten [1], [2]<sup>2)</sup> über den Dunkelstrom von Li-Sb- und Cs-Sb-Photokathoden mit Sekundärelektronenvervielfachern konnte gezeigt werden, dass dieser Dunkelstrom keinen von der Belichtung der Photokathode unabhängigen Wert besitzt. Eine Komponente, die thermische Emission der Photokathode, ist nach Belichtung des Photomultipliers grösser und fällt nach einer gewissen Zeit auf den Ausgangswert zurück.

Die Messungen wurden an Photomultipliern mit 17 Dynoden bei einer Verstärkung von  $1 \cdot 10^8$  durchgeführt. Die Durchsichtskathoden dieser Vervielfacher besitzen eine ausnutzbare Fläche von etwa  $10 \text{ cm}^2$ . Die Dynoden bestehen aus einer Legierung von Cu-Be [3]. Bei der gewählten Verstärkung werden alle an der Photokathode ausgelösten Elektronen gezählt. Die Impulse der Vervielfacher werden über einen Verstärker ( $V_{\text{max}} = 10^3$ ) einem Untersetzer zugeführt, der eine maximale Untersetzung von  $2^{15}$  gestattet.

Alle Messungen wurden so durchgeführt, dass der Vervielfacher bei spannungslosem Dynodensystem mit einer Wolframlampe belichtet und anschliessend der Dunkelstrom der Röhre verfolgt wurde.

Die sowohl an Li-Sb- als auch an Cs-Sb-Kathoden gewonnenen Resultate sind die folgenden:

### 1. Erhöhung der Nullstosszahl durch Belichtung der Photokathode

Die Photokathoden wurden mit einer konstanten Lichtintensität belichtet und dabei die Belichtungszeiten von 1–300 s variiert. Figur 1 zeigt den Verlauf der Nullstosszahlerhöhung in Funktion der Belichtungszeit von 1–180 s. Aufgetragen ist die zusätzliche Nullstosszahl, welche in der zweiten Minute nach Belichtungsende gemessen wurde. Die Kurven zeigen einen Sättigungswert. Für Cs-Sb werden dabei bedeutend höhere Nullstosszahlen erreicht als für Li-Sb.

### 2. Erhöhung der Rotausbeute der Cs-Sb-Kathoden durch Belichtung

Die Photokathoden wurden mit Licht der Wellenlänge  $801 \text{ m}\mu$  belichtet, eine Lichtwellenlänge, die keine Erhöhung des Nulleffektes zur Folge hat, dann

<sup>1)</sup> Institut für technische Physik an der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 459.



wurde die Ausbeute gemessen. Sodann wurde die Kathode bei spannungslosem Vervielfacher mit Weisslicht belichtet (Vorbelichtung) und anschliessend der Verlauf des Nulleffektes und der Rotausbeute gemessen. Figur 2 zeigt das Resultat. Unmittelbar nach der Vorbelichtung ist die Rotausbeute der Kathode bedeutend höher als der Normalwert. Mit dem Abfallen der zusätzlichen Nullstösse geht auch die Rotausbeute wieder auf den Normalwert zurück.

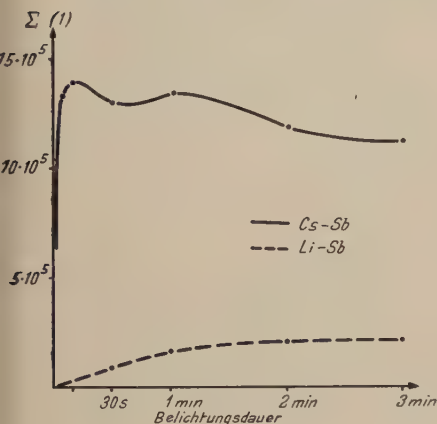


Fig. 1

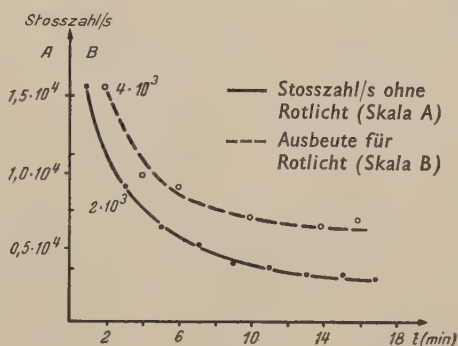


Fig. 2

### 3. «Ausleuchten» der vorbelichteten Photokathode mit Rotlicht

Eine Li-Sb-Photokathode wurde 3 min mit Blaulicht der Wellenlänge  $420 \mu$  vorbelichtet, und 2 min später wurde Spannung an die Röhre gelegt und die Erhöhung der Nullstosszahl gemessen (Kurve A in Figur 3). Anschliessend wurde diese Kathode wieder gleich vorbelichtet und ebenfalls ohne Spannung 1,5 min mit Licht der Wellenlänge  $801 \mu$  belichtet. 0,5 min später, also wiederum 2 min nach der Vorbelichtung mit Blaulicht, wurde Spannung an die Röhre gelegt und die Nullstosszahlerhöhung gemessen (Kurve B). Die Zahl der zusätzlichen Nullstösse war im zweiten Versuch kleiner. Es liegt somit ein Effekt vor, der an die Ausleuchtung und Tilgung gewisser Phosphore bei Infrarotbestrahlung erinnert.

### 4. Abhängigkeit der Erhöhung der Nullstosszahl von der Wellenlänge der Vorbelichtung

Die Cs-Sb-Kathode wurde mit Licht verschiedener Wellenlänge vorbelichtet und die resultierende Nullstosszahlerhöhung gemessen. Figur 4 zeigt den Verlauf für auf gleiche Energie reduzierte Lichtintensitäten.

### 5. Erhöhung der Leitfähigkeit der Cs-Sb-Schicht durch Belichtung [4]

Die untersuchte Cs-Sb-Kathode wurde in einer zylindrischen Zelle zwischen zwei Silberringen formiert [5]. Sie wurde ohne Spannung vorbelichtet, und

1 min nach Belichtung wurde ihre Leitfähigkeit gemessen. Eine Belichtung erhöht die Leitfähigkeit der Cs-Sb-Schicht. In Abhängigkeit der Belichtungsdauer wird ein Sättigungswert für die Leitfähigkeit erreicht.

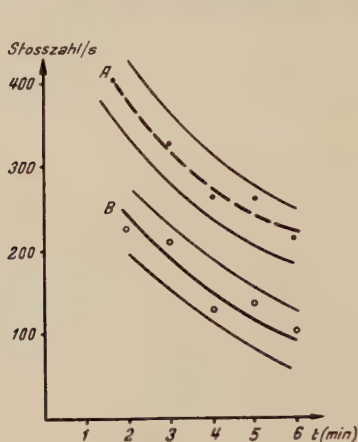


Fig. 3

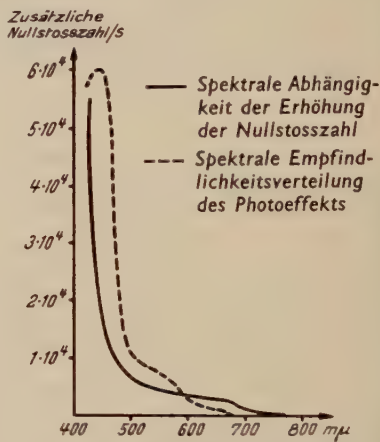


Fig. 4

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

1. Durch Belichtung wird die Nullstosszahl einer Cs-Sb- und Li-Sb-Photokathode erhöht. Die Erhöhung der Nullstosszahl in Funktion der Belichtungsdauer zeigt Sättigung.
2. Durch Belichtung wird die Leitfähigkeit der Kathode erhöht. In Abhängigkeit der Belichtungsdauer zeigt diese Erscheinung ebenfalls Sättigung.
3. Nach Belichtung zeigt die Photokathode eine erhöhte Rotempfindlichkeit, die im Dunkeln mit der Nullstosszahl wieder auf den Normalwert abklingt.
4. Das Abklingen der Nullstösse einer vorbelichteten Photokathode kann durch Belichtung mit Rotlicht beschleunigt werden (Ausleuchtungseffekt).
5. Die spektrale Abhängigkeit der Nullstosszahlerhöhung und des Photoeffekts ist für  $400 \text{ m}\mu < \lambda < 800 \text{ m}\mu$  im wesentlichen gleich. In der Nähe der langwelligen Grenze ist die Nullstosszahlerhöhung ausgeprägter.

## II. Deutungsversuch

Die Cs-Sb-Photokathode zeigt Halbleitereigenschaften [6], [7]. Im Bloch-schen Bändermodell dieser Kathode entstammen die Photoelektronen dem Valenzband. Durch Lichtabsorption in der Cs-Sb-Schicht werden sie aus diesem Band in das Leitfähigkeitsband gehoben, aus welchem sie ohne weiteren Energiebedarf ins Vakuum austreten können [8].

Die beobachteten Nachwirkungserscheinungen deuten auf das Vorhandensein von metastabilen Störstellen innerhalb der verbotenen Zone zwischen Valenz- und Leitfähigkeitsband hin. Das auf diese Weise ergänzte Modell dieser Photokathode würde alle beachteten Erscheinungen erklären.

### III. Beeinflussung der Charakteristik einer Cs-Sb-Photokathode

Unter «Charakteristik» einer Photokathode sollen die folgenden vier Daten zusammengefasst werden:

1. Empfindlichkeit ( $\mu\text{A}/\text{Lumen}$ );
2. spektrale Empfindlichkeitsverteilung;
3. Nullstosszahl  $N_0$  für eine gegebene Temperatur;
4. Nullstosszahlerhöhung  $\Delta N$  für eine gegebene Belichtungsintensität und -dauer.

Das Ziel der nachfolgenden Untersuchungen war, die Charakteristik der Cs-Sb-Photokathode derart zu beeinflussen, dass ohne nennenswerte Veränderung der beiden ersten Daten  $\Delta N \rightarrow 0$  gebracht wird. Dazu wurde der Einfluss von Zusätzen fremder Elemente untersucht und die normale Cs-Sb-Photokathode durch eine Kathode vom Typus Cs-Sb,El ersetzt, wobei El irgendein Element des periodischen Systemes bedeutet.

### IV. Versuchstechnik

In Graphittiegeln wurde Antimon in flüssigem, reinstem Kaliumchlorid unter Luftabschluss geschmolzen. Der Schmelze wurde das zu untersuchende Element in verschiedenen Konzentrationen beigegeben. Das auf diese Weise gewonnene Stoffsystem wurde an Stelle des einfachen Antimons als die eine Komponente der Cs-Sb,El-Kathode aus einer Wolframspirale auf die Glaswand des Vervielfachers aufgedampft. Bei diesem Vorgehen sind zwei Punkte zu berücksichtigen:

1. Der Schmelzprozess des Antimons im flüssigen KCl beeinflusst an sich schon die Nachwirkungserscheinungen der Photokathode. Der Sättigungswert der Nullstosszahlerhöhung fällt infolge dieses Prozesses auf die Hälfte, der Normalwert des Nullstromes der Photokathode auf 25% des mittleren Wertes einer gewöhnlichen Cs-Sb-Kathode.

2. Nach dem Aufdampfen des Stoffsystems (Sb,El) auf die Glaswand des Photomultipliers kann über die genaue Zusammensetzung der Schicht nichts ausgesagt werden. Spätere Versuche mit einem geeigneten Element sollen Klarheit über den Einfluss der Konzentration des Zusatzelementes geben.

Das verwendete Zäsium wurde im Vakuum in Ampullen eindestilliert. Die Cs-Ampulle befand sich in einem seitlichen Ansatz des Vervielfachers und wurde nach dem Ausheizen der Röhre geöffnet.

Bis zum Zeitpunkt der Abfassung dieses Berichtes sind insgesamt 18 Zusatzelemente untersucht worden. Mit jedem Zweistoffsystem wurden zuerst zwei einfache Photozellen hergestellt und an diesen das Formierungsverfahren festgelegt. Anschliessend erfolgte die Herstellung von ein bis zwei 17stufigen Sekundärelektronenvervielfachern, an welchen die Charakteristik der einzelnen Kathoden untersucht wurde.

Die Nullstossmessungen erfolgten bei allen Röhren mit einer Verstärkung von  $1 \cdot 10^8$ , so dass die gewonnenen Resultate unmittelbar miteinander verglichen werden können. Zur Kontrolle der Reproduzierbarkeit der Messungen wurden vier verschiedene Vervielfacher mit normaler Cs-Sb-Photokathode ausgemessen.

## V. Messungsergebnisse

### 1. Untersuchung von vier Cs-Sb-Vervielfachern

Figur 5 zeigt die Erhöhung der Nullstosszahlen in Funktion der Belichtungsdauer für die vier Vervielfacher mit normaler Cs-Sb-Photokathode. Der Sättigungswert aller vier Kathoden ist nahezu gleich, somit charakteristisch für die betreffende Kathode. Unterschiedlich sind jedoch die Anstiege zu diesen Sättigungswerten. Dieser ist also nicht typisch für die Cs-Sb-Schicht, sondern offenbar vom Formierungsgang abhängig.

Tabelle 1 gibt eine Zusammenstellung der entsprechenden Daten dieser vier Kathoden.

Tabelle 1

Kathode	Sättigungswert $N/\text{min}$	Anstiegszeit s	Nullstosszahl $N_0/s$
Cs-Sb (1)	$13,5 \cdot 10^5$	10	3200
Cs-Sb (2)	$12,5 \cdot 10^5$	80	2560
Cs-Sb (3)	$13,8 \cdot 10^5$	90	2560
Cs-Sb (4)	$13,0 \cdot 10^5$	180	1920
Cs-Sb (M) <sup>1)</sup>	$13,2 \cdot 10^5$	90	2560
<sup>1)</sup> Mittelwert der vier Messungen.			

### 2. Der Einfluss eines Zusatzelementes

Die untersuchten Elemente lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

- Elemente, welche die Empfindlichkeit der Cs-Sb-Kathode herabsetzen.
- Elemente, welche auf die Empfindlichkeit der Ausgangskathode keinen wesentlichen Einfluss haben, sondern in einigen Fällen nur die spektrale Empfindlichkeitsverteilung der Cs-Sb-Kathode etwas ändern.



a) *Schädliche Elemente.* Von den untersuchten Elementen gehören nur zwei zu der ersten Gruppe: Zn und Cd. In beiden Fällen betrug der Anteil des Zusatzes 10 Gewichtsprozent.

Zn: Die Cs-Sb,Zn-Kathode zeigte in keinem Formierungsstadium irgendwelche lichtelektrische Empfindlichkeit.

Cd: Ein Cd-Zusatz unterdrückt das Empfindlichkeitsmaximum der Cs-Sb-Kathode im blauen Spektralbereich. Die langwellige Grenze wird durch diesen

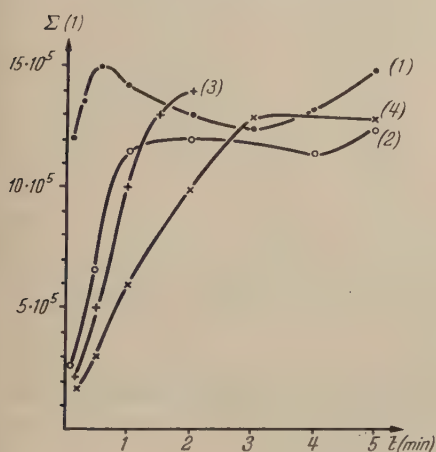


Fig. 5

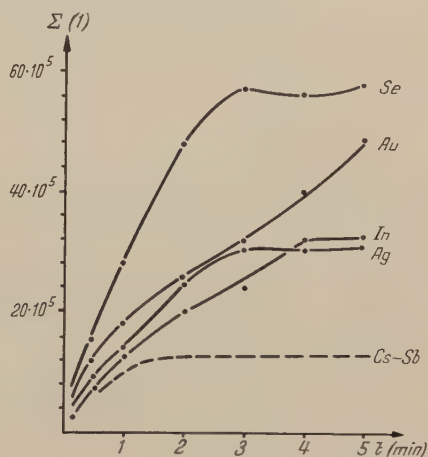


Fig. 6

Zusatz weiter nach Rot verschoben. Es entsteht eine Photokathode, welche über das ganze sichtbare Spektrum eine gleichmässige, geringe lichtelektrische Ausbeute aufweist. Die Cs-Sb,Cd-Kathode ist nicht brauchbar.

b) *Elemente ohne Einfluss auf die Empfindlichkeit der Cs-Sb-Photokathode.* Bei der beschriebenen Versuchstechnik lassen sich diese Elemente in bezug auf ihren Einfluss auf die Nachwirkungserscheinungen in folgende drei Untergruppen einteilen:

1a) Elemente, welche den Sättigungswert der zusätzlichen Nullstösse erhöhen;

2a) Elemente, welche einen ähnlichen Sättigungswert ergeben wie die normale Cs-Sb-Photokathode;

3a) Elemente, welche den Sättigungswert erniedrigen. Es sind die Elemente der dritten Untergruppe, welche eine Verbesserung mit sich bringen.

1a) *Elemente, welche den Sättigungswert der zusätzlichen Nullstösse erhöhen.* Zu diesen Elementen gehören: Se, Au, In und Ag. Figur 6 zeigt den Verlauf der zusätzlichen Nullstosszahlen in Funktion der Belichtungsdauer für die verschiedenen Kathoden dieser Gruppe. Für die Cs-Sb-Kathode ist die mittlere

Kurve gestrichelt eingezeichnet. Tabelle 2 gibt die Gewichtsprozent des Zusatzes, die Normalnullstosszahl sowie die Nullstosszahlerhöhung für die Wellenlänge  $\lambda = 420 \text{ m}\mu$  wieder (Lichtintensität für  $\lambda = 420 \text{ m}\mu$  rund 1% derjenigen für Weisslicht, Belichtungsdauer 1 min).

Tabelle 2

Kathode	Gewichtsprozent des Zusatzes	Normalnullstosszahl $N_0/s$	$\Delta N \lambda = 420 \text{ m}\mu$ $N/\text{min}$
Cs-Sb	—	2560	$5,3 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Se	2	2900	$5,9 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Au	5	1920	$4,1 \cdot 10^5$
Cs-Sb, In	10	1280	$1,8 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Ag	50	2550	$2,0 \cdot 10^5$

Für geringe Lichtintensitäten zeigen diese Kathoden, mit Ausnahme der Cs-Sb,Se-Kathode, eine kleinere Nullstosszahlerhöhung als die mittlere Erhöhung der Cs-Sb-Kathode.

2a) *Elemente mit unverändertem Sättigungswert.* Es sind die Zusatzelemente Al, Sn, Cu und Ce. Figur 7 gibt den Verlauf der Nullstosszahlerhöhung für diese Gruppe von Kathoden, Tabelle 3 die der vorangehenden Tabelle entsprechenden Grössen.

Tabelle 3

Kathode	Gewichtsprozent des Zusatzes	Normalnullstosszahl $N_0/s$	$\Delta N \lambda = 420 \text{ m}\mu$ $N/\text{min}$
Cs-Sb	—	2560	$5,3 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Al	5	1900	$1,0 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Sn	50	640	$0,73 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Cu	50	500	$0,53 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Ce	10	190	$0,41 \cdot 10^5$

Die Kurven dieser Elementengruppe zeigen alle einen flacheren Anstieg zum Sättigungswert als die mittlere Cs-Sb-Kurve. Die beiden Elemente Cu und Ce bewirken eine bedeutende Reduktion der Nullstosszahlerhöhung bei geringen Lichtintensitäten verbunden mit einer starken Reduktion der Normalnullstosszahl. Diese ist von derselben Grössenordnung wie für die Li-Sb-Kathode.

3a) *Elemente, welche den Sättigungswert der Nachwirkung erniedrigen.* Unter diese Elementengruppe gehören: Ca, Mn, Sr, Be, Tl und Mg. Figur 8 zeigt den Verlauf der zusätzlichen Nullstosszahlen, Tabelle 4 gibt die übrigen Daten.

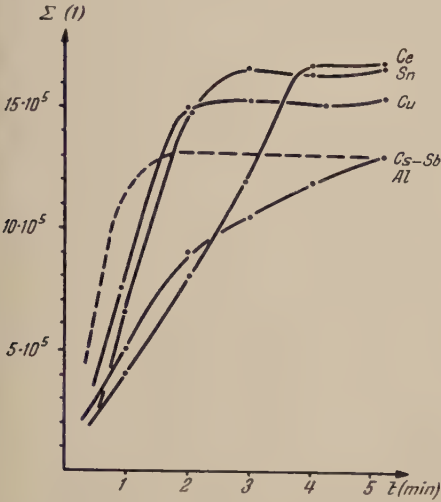


Fig. 7

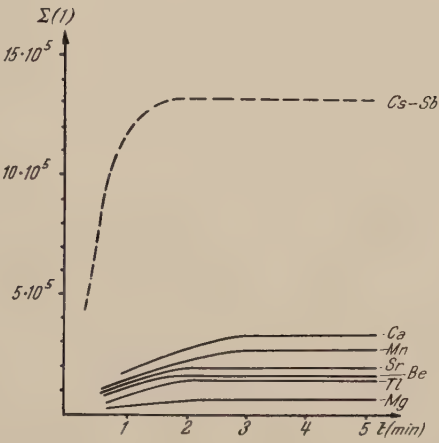


Fig. 8

Tabelle 4

Kathode	Gewichtsprozent des Zusatzes	Normalnullstosszahl $N_0/s$	$\Delta N \lambda = 420 \text{ m}\mu$ $N/\text{min}$
Cs-Sb	—	2560	$5,3 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Ca	10	450	$0,12 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Mn	30	450	$0,20 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Sr	8	300	$0,09 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Be	10	190	$0,10 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Tl	10	65	$0,10 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Mg	25	120	$0,10 \cdot 10^5$

Für einen Mg-Zusatz fällt die Nullstosszahlhöhung für Weisslicht auf 4% des Cs-Sb-Wertes, für Blaulicht auf 1,9%. Die Normalnullstosszahl fällt für diesen Zusatz auf 5%, für Tl sogar auf 2,5%.

### 3. Rotausbeute der Kathoden

Messungen bei einer Wellenlänge von  $660 \text{ m}\mu$  zeigen, dass die Ausbeuten für diese Wellenlänge für die verschiedenen Kathoden wie 1:10 schwanken. Die kleinste Rotausbeute zeigt die Kathode mit Mg-Zusatz, die höchste diejenige mit Au-Zusatz.

#### 4. Totalausbeuten der Kathoden

Die Ausbeuten für Weisslicht schwanken wie 1:2. Die Schwankung liegt somit in der normalen Grenze. Es ist insbesondere keine systematische Abnahme der Ausbeute der Kathoden der ersten Gruppe zu denjenigen der dritten festzustellen.

### VI. Zusammenstellung

Tabelle 5 gibt eine Zusammenstellung der Daten der untersuchten Kathoden:

Tabelle 5

Kathode	Sättigungswert $N/\text{min}$	Anstiegszeit s	Normalnullstrom $N_0/s$
Cs-Sb, Se	$57,3 \cdot 10^5$	180	2900
Cs-Sb, Au	$49,1 \cdot 10^5$	300	1920
Cs-Sb, In	$32,7 \cdot 10^5$	240	1280
Cs-Sb, Ag	$31,9 \cdot 10^5$	180	2550
Cs-Sb (1)	$13,5 \cdot 10^5$	10	3200
Cs-Sb (2)	$12,5 \cdot 10^5$	80	2560
Cs-Sb (3)	$13,8 \cdot 10^5$	90	2560
Cs-Sb (4)	$13,0 \cdot 10^5$	180	1920
Cs-Sb, Ce	$17,0 \cdot 10^5$	240	190
Cs-Sb, Sn	$16,8 \cdot 10^5$	180	640
Cs-Sb, Cu	$15,5 \cdot 10^5$	120	500
Cs-Sb, Al	$13,2 \cdot 10^5$	150	1900
Cs-Sb, Ca	$3,3 \cdot 10^5$	180	450
Cs-Sb, Mn	$2,8 \cdot 10^5$	180	450
Cs-Sb, Sr	$2,0 \cdot 10^5$	120	300
Cs-Sb, Be	$1,6 \cdot 10^5$	90	190
Cs-Sb, Tl	$1,5 \cdot 10^5$	120	65
Cs-Sb, Mg	$0,57 \cdot 10^5$	120	120

Die Tabelle deutet folgende zwei Gesetzmässigkeiten an:

a) Mit Abnahme des Sättigungswertes der zusätzlichen Nullstösse nimmt ebenfalls der Nullstrom der Kathode ab.

b) Bei gleichem Sättigungswert weist diejenige Kathode den kleineren Nullstrom auf, die die längere Anstiegszeit zur Sättigung der zusätzlichen Nullstösse zeigt.

Die umfangreichen Untersuchungen sind zum grössten Teil mit Mitteln der GFF., aber auch mit solchen der Eidgenössischen Volkswirtschaftsstiftung durchgeführt werden.



Ich spreche an dieser Stelle diesen beiden Institutionen meinen besten Dank aus. Gleichfalls danke ich Herrn CH. FLURY für die Mitarbeit bei der Durchführung der Messungen.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] N. SCHAETTI und W. BAUMGARTNER, *Helv. Phys. Acta* 25, 605 (1952).
- [2] N. SCHAETTI, W. BAUMGARTNER und CH. FLURY, *Helv. Phys. Acta* 26, 380 (1953).
- [3] N. SCHAETTI, *ZAMP* 2, 123 (1951).
- [4] N. SCHAETTI und W. BAUMGARTNER, *ZAMP* 4, 159 (1953).
- [5] N. SCHAETTI und W. BAUMGARTNER, *Le Vide* 6, 1041 (1951).
- [6] V. K. ZWORYKIN und E. G. RAMBERG, *Photoelectricity and its Application* (John Wiley & Sons, New York 1949), S. 58.
- [7] N. SCHAETTI und W. BAUMGARTNER, *Helv. Phys. Acta* 24, 614 (1951).
- [8] L. APKER, E. TAFT und J. DICKEY, *IOSA* 43, 78 (1953).

### Summary

The investigations on dark current in photomultipliers with Cs-Sb- and Li-Sb-photocathodes indicate that these cathodes show a delayed emission of electrons after each exposition to light. The addition of a certain number of elements to the cathode-layer reduces this delayed emission and at the same time the dark current of the photocathode.

(Eingegangen: 24. September 1953.)

---

## Zur Kenntnis der Dampfdrucke von Zäsium-, Rubidium- und Kaliumchlorid

VON W. D. TREADWELL und WALTER WERNER, Zürich<sup>1)</sup>

Die Dampfdrucke der festen Alkalichloride beanspruchen im Hinblick auf die gut bekannten Eigenschaften ihrer Gitter spezielles Interesse. Druckwerte bei möglichst tiefen Temperaturen sind hierbei besonders erwünscht. Von mehreren Salzen dieser Gruppe liegen auch bereits zahlreiche Messungen der Dampfdrucke im Vakuum vor, die nach verschiedenen Methoden gewonnen worden sind.

DEITZ<sup>2)</sup> hat auf Veranlassung von RODEBUSH<sup>3)</sup> Sublimationsdrucke von KCl und CsJ gemessen, im gleichen Temperaturgebiet, in welchem die Dipolmomente bestimmt worden waren. Die erste Methode von DEITZ bestand in der absoluten Messung des Dampfdruckes der Kristalle gegen eine dünne Aluminiummembran, an einer elektromagnetischen Waage. In demselben Vakuumgefäß

---

<sup>1)</sup> Laboratorium für anorganische Chemie, ETH.

<sup>2)</sup> V. DEITZ, *J. chem. Phys.* 4, 578 (1936).

<sup>3)</sup> E. F. FIOCK und W. H. RODEBUSH, *J. Amer. chem. Soc.* 48, 2522 (1926).

wurden auch Bestimmungen nach der Ausströmungsmethode von KNUDSEN<sup>1)</sup> vorgenommen. Das Ausströmen des Dampfes erfolgte aus einem Quarzgefäß mit enger Öffnung, von der die Länge des Kanals bei der Berechnung der Austrittsmenge des Gases berücksichtigt wurde. Die Masse des ausgeströmten Dampfes wurde aus dem Gewichtsverlust des Salzbehälters in passend gewählten Zeitintervallen bestimmt.

Die Berechnung des Druckes erfolgte nach der Gleichung:

$$p = \frac{m}{t} \left( \frac{2 \pi R T}{M} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{A} + \frac{3 L}{2 \pi D^3} \right). \quad (1)$$

Hierin bedeuten:  $m$  die Masse des in der Zeit  $t$  ausgeströmten Dampfes,  $M$  das Molekulargewicht desselben,  $T$  die absolute Temperatur,  $A$  den Querschnitt der Ausströmungsöffnung,  $L$  die Länge des Ausströmungskanals und  $D$  den Durchmesser desselben. Das letzte Glied der Gleichung, welches die Wandstärke der Ausströmungsöffnung berücksichtigt, macht etwa 5% von  $1/A$  aus, wenn  $L$  nicht über  $1/7$  von  $D$  beträgt. Bei hinreichend dünner Wandung der Ausströmungsöffnung kommt der zweite Summand von Gleichung (1) in Wegfall, und man erhält die ursprünglich von KNUDSEN benützte Gleichung.

Bei der erstgenannten Methode lieferten nur die Pulver der zuvor eingeschmolzenen und dadurch gasfrei gemachten Salze reproduzierbare Werte, da sich die eingeschlossenen Gase an der Druckwirkung auf die Aluminiummembran beteiligten und dadurch 10–30% zu hohe Druckwerte lieferten. Mit den entgasten Salzpulvern wurden nach beiden Methoden übereinstimmende Druckwerte erhalten. Die Drucke von KCl, welche im Temperaturbereich von 574–664°C gemessen worden waren, liessen sich gut durch:

$$\log p_{(\text{Dyn})} = -\frac{11,300}{T} + 13,361 \quad (2)$$

darstellen.

MAYER und HÖLDER-WINTNER<sup>2)</sup> haben die Tensionen von einer Reihe fester Alkalichloride nach der Effusionsmethode von KNUDSEN ermittelt, wobei die aus einer kreisförmigen Öffnung ins Vakuum austretenden Dämpfe der Salzpulver in gemessenen Zeiten auf einer kalten Fläche kondensiert und bestimmt wurden. So wurden die Tensionen von KCl und RbCl in den Temperaturbereichen von 899,4–935,3° K bzw. 888,0–925,6° K gemessen.

ZIMM und MAYER<sup>3)</sup> haben die Tensionen von einigen Alkalihalogeniden nach der Ionisationsmethode von LANGMUIR<sup>4)</sup> bestimmt. Die bei gemessener Temperatur aus einem Salzbehälter mit feiner Öffnung ins Vakuum austretenden Dämpfe werden hierbei an einem hochoverhitzten Wolframdraht von bekannter

<sup>1)</sup> M. KNUDSEN, Ann. Physik 47, 697 (1915).

<sup>2)</sup> J. E. MAYER und IRMGARD HÖLDER-WINTNER, J. chem. Phys. 6, 301 (1938).

<sup>3)</sup> B. H. ZIMM und J. E. MAYER, J. chem. Phys. 12, 362 (1944).

<sup>4)</sup> I. LANGMUIR, Phys. Rev. 51, 753 (1937).

Heizfläche total dissoziiert und die gebildeten Metallatome ionisiert. Durch Anlegen eines geeigneten Feldes werden die Atomionen von einem Kollektor eingefangen und die hierdurch entstehende Stromstärke gemessen. Bei vollständiger Spaltung der Salzdämpfe und totaler Ionisation der Metallatome wird der Ionenstrom zum Kollektor dem Dampfdruck des Salzes proportional. Dabei muss jedoch das zum Kollektor angelegte Feld so bemessen sein, dass an diesem noch keine Ionenbildung durch Stosswirkung hervorgerufen wird. Es bestehen auch noch andere Möglichkeiten einer zusätzlichen Ionenbildung, welche bei dieser Methode leicht zu positiven Fehlern der Salzdampfdrucke Anlass geben können. Bei optimalen Versuchsbedingungen (geeignete Wahl der Temperatur des Glühdrahtes und des Feldes zum Kollektor) lässt sich der Dampfdruck des Salzes durch die Gleichung:

$$p = \left[ N R^2 (2 \pi m k T)^{1/2} \frac{1}{r^2 A F} \right] i \quad (3)$$

ausdrücken.

Hierin bedeuten:  $N$  die Avogadrosche Zahl,  $R$  die Distanz der Austrittsöffnung des Dampfstrahls von dem Wolframfaden,  $m$  die Masse eines Dampfmoleküls,  $k$  die Boltzmannsche Konstante,  $T$  die absolute Temperatur,  $r$  der Radius von der Austrittsöffnung des Dampfes,  $A$  die Planprojektion des ionisierenden Wolframfadens,  $F$  die Faradaysche Konstante und  $i$  der zwischen dem Wolframfaden und dem Kollektor gemessene Strom.

Wir haben nun die Mitführungsmethode unter Verwendung von reinem Stickstoff als Transportgas bei CsCl, RbCl und KCl im Gebiet kleiner Drucke geprüft, so dass ein Vergleich mit den obenerwähnten Daten möglich wurde.

Bei der Verdampfung von Quecksilber im Vakuum hatte KNUDSEN<sup>1)</sup> beobachtet, dass die gaskinetisch zu erwartende Verdampfungsgeschwindigkeit nur mit reinsten, frisch hergestellten Oberflächen erreicht wird. Schon geringe Verunreinigungen der Oberflächen genügten, um die Verdampfungsgeschwindigkeit auf 2/1000 des theoretischen Wertes herabzusetzen. Wie weit die Verdampfungsgeschwindigkeit der Alkalichloride durch ein Mitführgas von Atmosphärendruck (in unserem Fall von Stickstoff) gehemmt wird, war nicht vorauszusehen.

Die Versuche von COCKROFT<sup>2)</sup> über die Kondensation von Kadmiumdämpfen haben gezeigt, dass zur Kondensation derselben eine charakteristische Übersättigung erforderlich ist, um die Energie der Keimbildung aufzubringen. Zumal an gasbedeckten Oberflächen erweist sich diese Energie als recht beträchtlich. BEECK, SMITH und WHEELER<sup>3)</sup> beobachteten bei der Kondensation von Nickeldampf an Glas, die im Vakuum regellos erfolgt, dass sich in Gegenwart eines geringen Stickstoffdruckes die (110)-Fläche des Nickels parallel zur Glaswand

1) M. KNUDSEN, Ann. Physik 47, 697 (1915).

2) J. D. COCKROFT, Proc. Roy. Soc. [A] 119, 293 (1928).

3) O. BEECK, A. E. SMITH und A. WHEELER, Proc. Roy. Soc. [A] 177, 62 (1941).

orientiert, womit eine Verzögerung in der Abscheidung des Nickels durch den anwesenden Stickstoff verbunden sein dürfte.

Auch bei unsern Mitführungsversuchen erfolgte die Kondensation der Salzdämpfe in der Form von gut ausgebildeten, separaten kleinen Kriställchen, offenbar an diskreten aktiven Stellen der Oberfläche des Kühlers. Ob bei einem derartigen Verlauf der Kondensation eine eng lokalisierte vollständige Abscheidung der Salzdämpfe aus dem Transportgas möglich ist, sollte durch unsere Versuche geprüft werden. Durch unvollständige Mischung des Salzdampfes mit dem Transportgas und durch unvollständige Kondensation infolge von Nebelbildung können offenbar bei der Mitführungsmethode negative Fehler entstehen.

### *Experimentelles*

Figur 1 zeigt unsere Sublimationsapparatur. In die Quarzpipette von 15 mm Weite ist die rund  $1/20$  Mol betragende Salzprobe eingefüllt. Mit zwei Sieben von 36 und 100 Maschen pro Quadratzentimeter wurde das Salz zuvor auf möglichst gleiche Korngrösse gebracht. Von unten wird gereinigter und über Phosphorpentoxyd getrockneter Stickstoff in gemessenem Tempo eingeleitet und durch eine zentral angeordnete, auswechselbare Quarzkapillare zum Messgefäß für den Stickstoff abgeleitet. Die Temperatur der Dämpfe wurde bei S mit dem Thermoelement  $T_1$  gemessen, das mit reinstem Zink und Kadmium und mit der bei  $637^\circ\text{C}$  schmelzenden Mischung von  $30,5\%$  NaCl +  $96,5\%$   $\text{Na}_2\text{SO}_4$  geeicht worden war. Mit Hilfe eines Thermoregulators, der durch das Thermoelement  $T_2$  betätigt wurde, konnte die Temperatur bei S auf  $\pm 1^\circ\text{C}$  konstant gehalten werden.

Mit einem empfindlichen Strömungsmesser wurde die gewünschte Stromgeschwindigkeit des Stickstoffs eingestellt. Das Gas wurde in einem als Eudiometer dienenden, geeichten Kolben von  $3135\text{ cm}^3$  über Wasser aufgefangen und sein Volumen entsprechend der Temperatur des Rezipienten und dem herrschenden Barometerstand auf  $0^\circ$  und 760 mm Hg reduziert.

Das Gas perlte durch eine Kapillare in gleichmässigem Strom in den Rezipienten. Da derselbe nur 5 mm in die Sperrflüssigkeit eintauchte, herrschte während der ganzen Versuchsdauer in der Apparatur Atmosphärendruck. Um eine vollständige Sättigung des Stickstoffs mit den Salzdämpfen zu gewährleisten, wurde nur mit Stromgeschwindigkeiten des Stickstoffs von  $3\text{--}20\text{ cm}^3/\text{min}$  gearbeitet, wobei die Füllung des Rezipienten mit dem Stickstoff Versuchsdauern bis über 24 h beanspruchen konnte.

Die Kondensation der Salzdämpfe erfolgte zur Hauptmenge im oberen Viertel der 2 mm weiten Kapillare, meist in der Form von gut ausgebildeten kubischen Kriställchen.

Das Sublimat wurde mit doppelt destilliertem Wasser aus der Kapillare herausgelöst und der Gehalt durch elektrometrische Titration mit  $0,01\text{-}n$  bzw.



0,001- $n$   $\text{AgNO}_3$  in einem Volumen von 1–2  $\text{cm}^3$  bestimmt, wobei die Salzmenge auf 2–3  $\mu\text{g}$  genau ermittelt werden konnte, während die Kondensate meist weit mehr als das Hundertfache betrugen.

Zur Bestimmung des Dampfdruckes diente das auf Normalbedingungen reduzierte Volumen des Transportgases, der Barometerdruck und das Gewicht

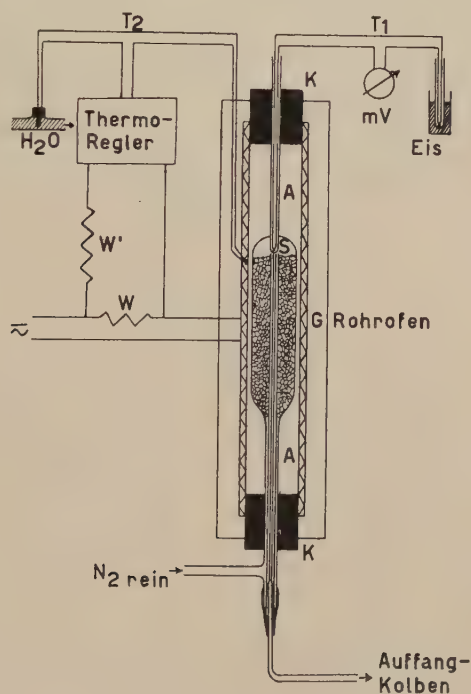


Fig. 1

des Sublimats, von dem wir annehmen, dass es im Gaszustand aus einfachen Alkalihalogenidmolekeln bestand. Von ZIMM und MAYER<sup>1)</sup> ist gezeigt worden, dass  $\text{CsCl}$  in seinem Dampf bis  $800^\circ\text{C}$  weniger als 0,3% Doppelmoleküle enthält.

Da der Anteil des Salzdampfes am Gesamtdruck verschwindend klein ist, kann der Druck  $p$  des Salzdampfes durch

$$p = \frac{b \times \text{Mole Sublimat}}{\text{Mole } \text{N}_2 \text{ vom Transportgas}} \quad (4)$$

ausgedrückt werden, wobei  $b$  den herrschenden Barometerstand in  $\text{mm Hg}$  bedeutet.

<sup>1)</sup> B. H. ZIMM und J. E. MAYER, J. chem. Phys. 12, 362 (1944).

Die von dem angewandten Stickstoffstrom mitgeführte Salzmenge betrug jeweils nur einen sehr kleinen Bruchteil derjenigen Salzmenge, welche nach der Effusionsgleichung von KNUDSEN ins Vakuum verdampfen würde. Es erwiesen sich denn auch die mitgeführten Salzmenngen von der angewandten Stromgeschwindigkeit des Stickstoffes unabhängig.

In Figur 2 sind die gemessenen Drucke der Salzdämpfe gegen die reziproke absolute Temperatur  $1/T \cdot 10^4$  aufgetragen. Tabellen der gemessenen Druck-

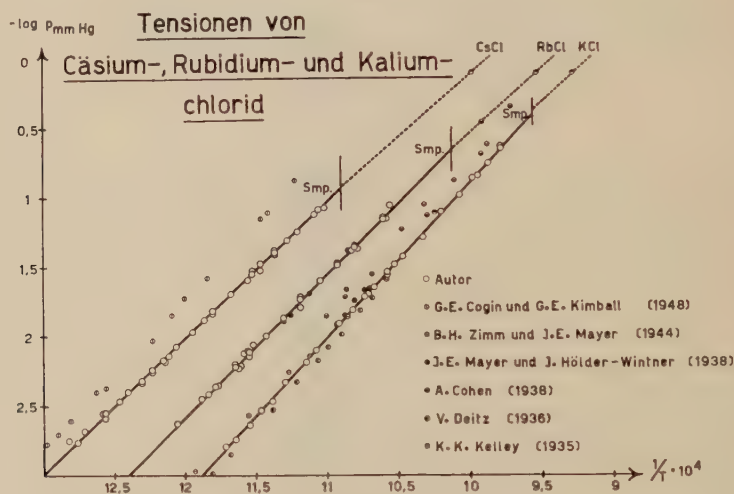


Fig. 2

werte enthält die Dissertation von WERNER<sup>1)</sup>. Zum Vergleich mit unsern Dampfdrucken sind in Figur 2 die Druckwerte der in der Einleitung erwähnten Autoren mit eingezeichnet.

**Zäsiümchlorid.** Unsere Tensionswerte liegen in befriedigender Weise auf der gezeichneten Geraden und schliessen sich auch richtig an die Tensionswerte des flüssigen Salzes nach den Angaben von KELLEY<sup>2)</sup> an. Die Tensionswerte von COGHIN und KIMBALL<sup>3)</sup>, welche nach der positiven Ionenmethode ermittelt worden sind, liegen dagegen durchwegs höher und passen auch weniger gut zu den Drucken des geschmolzenen Zäsiümchlorids nach den Daten von KELLEY. Wir vermuten daher, dass die Drucke von COGHIN und KIMBALL im Sinne der positiven Fehlermöglichkeiten ihrer Methode zu hoch liegen, einer Temperaturdifferenz von rund 7°C entsprechend.

<sup>1)</sup> W. WERNER, Diss. ETH. Zürich (1953). Eine verkürzte Tabelle der Messwerte soll demnächst in den «Helvetica Chimica Acta» mitgeteilt werden.

<sup>2)</sup> K. K. KELLEY, U. S. Bur. Mines Bull. 383 (1935).

<sup>3)</sup> G. E. COGHIN und G. E. KIMBALL, J. chem. Phys. 16, 1035 (1948).

*Rubidiumchlorid.* Die Übereinstimmung unserer Tensionswerte mit den Daten von MAYER und HÖLDER-WINTNER<sup>1)</sup> kann als praktisch vollständig bezeichnet werden. Die Extrapolation der Druckwerte in Figur 2 bis zum Schnittpunkt mit der Tensionsgeraden des geschmolzenen Salzes nach den Angaben von KELLEY entspricht dem beobachteten Schmelzpunkt von 988°K.

*Kaliumchlorid.* Unsere Werte halten die Mitte zwischen den Daten von DEITZ<sup>2)</sup> und denjenigen von ZIMM und MAYER<sup>3)</sup> und stimmen mit diesen auch gut überein. Dies erscheint bemerkenswert, da die Messungen nach ganz verschiedenen Methoden erfolgten, nämlich nach einer absoluten Methode und dem Effusionsverfahren von KNUDSEN, ferner nach der Methode der positiven Ionen und nach der Transportgasmethode.

Wesentlich höher liegen die älteren, weniger genauen und nun überholten Werte von COHEN<sup>4)</sup> nach der Transportgasmethode.

Die Tensionsgeraden von Figur 2 werden durch die Gleichung:

$$-\log p \text{ (mm Hg)} = \frac{1}{T} \cdot 10^4 \cdot a - b \quad (5)$$

gut dargestellt, wobei  $a$  und  $b$  die folgenden Werte erhalten:

	CsCl	RbCl	KCl
$a$	0,997	1,020	1,107
$b$	9,942	9,643	10,151

Aus den Tensionsgleichungen (5) werden die folgenden Sublimationswärmen  $\Delta H$  mit Hilfe der Gleichung von CLAUSIUS-CLAPEYRON erhalten:

*Sublimationswärmen*

	CsCl	RbCl	KCl
$\Delta H_{\text{Sub}}$	44,1 kcal	46,4 kcal	50,2 kcal

*Sublimationstrennungen*

Es entstand nun die Frage, ob sich die beobachteten Druckunterschiede der untersuchten Alkalihalogenide zu Sublimationstrennungen im Vakuum ver-

1) J. E. MAYER und IRMGARD HÖLDER-WINTNER, J. chem. Phys. 6, 301 (1938).

2) V. DEITZ, J. chem. Phys. 4, 578 (1936).

3) B. H. ZIMM und J. E. MAYER, J. chem. Phys. 12, 362 (1944).

4) A. COHEN, Diss. ETH., Zürich (1938).

werten lassen. Zur Ausführung der Versuche diente die Apparatur von Figur 3. Das Sublimationsrohr aus Pyrexglas hatte einen Durchmesser von 4 cm.

Die Fläche des mit Normalschliff eingesetzten Luftkühlers befand sich 5 mm über der Substanz. Das 25 cm lange Sublimationsrohr wurde in einem elektrischen Tiegelofen auf der gewünschten Temperatur gehalten und die Sublimation in einem Vakuum von  $1-3 \cdot 10^{-5}$  mm Hg durchgeführt.

Der zeitliche Verlauf der Sublimation wurde zunächst mit je 1 g der reinen Chloride bei  $440^{\circ}\text{C}$  geprüft, wobei die Kondensate als zusammenhängende, eisartige Schicht auf dem erweiterten Teil des Kühlers erhalten wurden. Diese wurden mit Wasser weggelöst und nach dem Eindampfen und Trocknen bei  $180^{\circ}\text{C}$  gewogen.

Die Temperatur war so gewählt, dass der Druck des Restgases im Apparat nur von der Tension des CsCl übertroffen wurde:

$$p_{\text{CsCl}} = 6,8 \cdot 10^{-5}; \quad p_{\text{KCl}} = 0,25 \cdot 10^{-5}; \quad \text{Vakuum } 2 \cdot 10^{-5} \text{ mm Hg.}$$

Figur 4 zeigt den beobachteten zeitlichen Verlauf der Sublimation der reinen Chloride. Danach sollte eine weitgehende Abtrennung des CsCl aus Gemischen mit KCl und RbCl möglich sein, sofern die Sublimation der reinen Komponenten nicht durch Mischkristallbildung beeinträchtigt wird.

Nach HAVIGHURST und Mitarbeitern<sup>1)</sup> sollen bei Zimmertemperatur bis zu 85 Molprozent KCl im Gitter von CsCl gelöst werden, wobei eine Erweiterung des innenzentrierten CsCl-Gitters erfolgt. Bei  $25^{\circ}\text{C}$  vermag RbCl mehr als 15 Molprozent CsCl, CsCl mehr als 11,5 Molprozent RbCl zu lösen. Im Mischkristall von CsCl/RbCl vergrößert sich hierbei die Gitterkonstante von RbCl auf 6,585 Å, während das innenzentrierte CsCl-Gitter zusammenschrumpft.

Nach den röntgenographischen Messungen von THOMAS<sup>2)</sup> tritt vollständige Mischkristallbildung der Alkalichloride ein, wenn die Differenz der Gitterkonstanten der beiden Komponenten kleiner wird als 5%, ihres mittleren Atomabstandes. Oberhalb von  $445^{\circ}\text{C}$  geht CsCl von der innenzentrierten in die flächenzentrierte Modifikation über, welche nun ein viel grösseres Bestreben besitzt, mit RbCl und KCl Mischkristalle zu bilden.

Wie kürzlich erneut von DOROTHEA MEIER und TREADWELL<sup>3)</sup> gezeigt worden ist, lassen sich kleine Mengen von CsCl und RbCl von einem sehr grossen Überschuss an KCl trennen durch Fällung des letzteren mit Chlorwasserstoffgas in der Kälte. Es gelang so, das Gewichtsverhältnis (CsCl bzw. RbCl) : KCl von etwa 1 : 5000 auf mindestens 1 : 2 bis 1 : 5 zu verschieben, ohne dass erhebliche Verluste an CsCl oder RbCl durch Mischkristallbildung mit dem ausfallenden KCl entstanden sind.

<sup>1)</sup> R. J. HAVIGHURST, E. MACK und F. C. BLAKE, J. Amer. chem. Soc. **47**, 40 (1925).

<sup>2)</sup> E. B. THOMAS, J. Amer. chem. Soc. **57**, 823 (1935).

<sup>3)</sup> DOROTHEA MEIER und W. D. TREADWELL, Helv. chim. Acta **34**, 805 (1951).



Es war daher zu erwarten, dass sich CsCl aus Eindampfrückständen mit KCl und RbCl teilweise in reinem Zustand absublimieren lässt, sofern das CsCl im Bodenkörper nicht ausschliesslich als Mischkristall vorliegt. Eine möglichst rasche Abtrennung, also Sublimation im Vakuum, sollte hierfür besonders günstig sein.

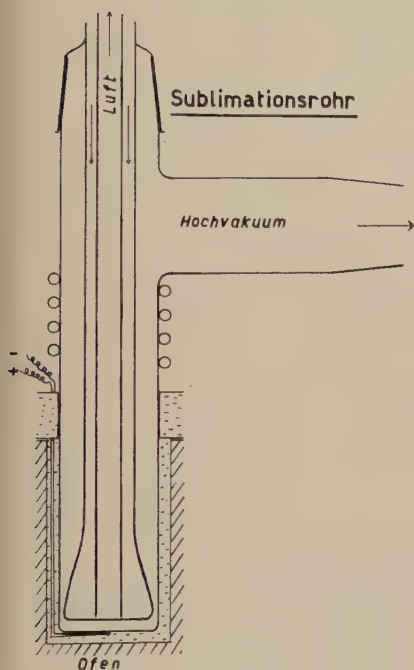


Fig. 3

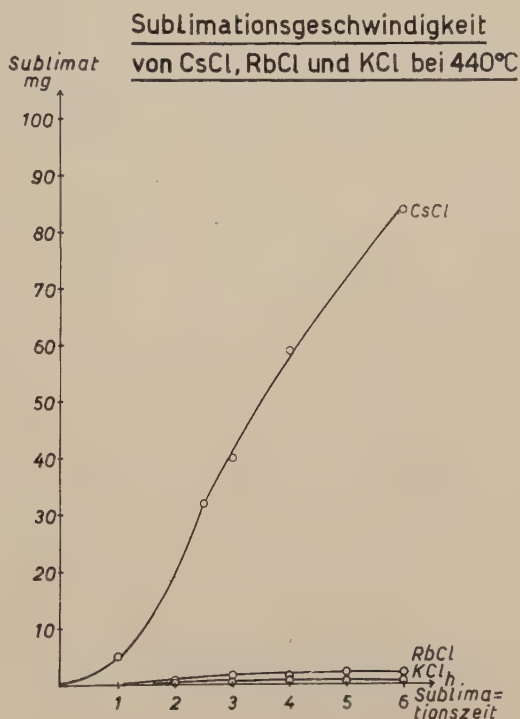


Fig. 4

*Sublimationsversuche mit Mischungen der Chloride.* Äquimolare Mischungen, welche durch vorsichtiges Eindampfen von je 10 cm<sup>3</sup> 1-n CsCl mit je 10 cm<sup>3</sup> 1-n KCl bzw. RbCl erhalten worden waren, dienten als Ausgangsmaterial zu Sublimationsversuchen im Vakuum in dem Apparat von Figur 3. Durch Zerdrücken der Eindampfrückstände im Achatmörser (nicht Zerreiben) und Sieben wurden die Salzproben auf möglichst gleiche Korngrösse gebracht und je 1 g der Mischungen zu den Versuchen verwendet.

Die während der Sublimation konstant gehaltene Temperatur wurde so gewählt, dass nur der Dampfdruck des CsCl den in der Apparatur herrschenden Restgasdruck übertraf. Es wurden Sublimationsversuche mit CsCl, KCl 1:1 bei 430°C, 440°C und 480°C und mit CsCl, RbCl 1:1 bei 430°C, 440°C,

455°C und 470°C ausgeführt, wobei ein Vakuum in der Apparatur von  $(2 \pm 1) \cdot 10^{-5}$  mm Hg aufrechterhalten wurde.

Zur Ermittlung der Sublimationskurve wurden Proben von je 2–8% des vorgelegten Bodenkörpers (1 g) absublimiert, die Menge und Zusammensetzung derselben bestimmt und die Werte gegen die Zusammensetzung des Bodenkörpers aufgetragen. Figur 5 zeigt den Verlauf der Fraktionierung von CsCl, KCl 1:1 bei 430°C. Diese ist durch vier scharf getrennte Stufen gekennzeichnet. Auf die beiden Fraktionen mit konstanter Zusammensetzung folgt je eine Stufe mit linear abnehmendem Gehalt an CsCl. Die gewichtsmässigen Anteile der Stufen sind aus der folgenden Tabelle zu ersehen.

	Sublimat		Bodenkörper	
	mg CsCl	mg KCl	mg CsCl	mg KCl
Vorgelegtes Salz . . . . .			690	310
Ende der ersten Stufe:				
Fraktion von 100 Molprozent CsCl . .	92,1	—		
Rückstand . . . . .			597,9	310
Ende der zweiten Stufe:				
Fraktion von 100–81 Molprozent CsCl.	100,5	4,5		
Rückstand . . . . .			497,4	305,5
Ende der dritten Stufe:				
Fraktion von 80 Molprozent CsCl. . .	114,3	13,1		
Rückstand . . . . .			383,1	292,4
Ende der vierten Stufe:				
Fraktion von 71,5–50 Molprozent CsCl	169,8	45,4		
Rückstand . . . . .			213,3	247,0

Durch Erhöhung der Sublimationstemperatur auf 440°C und 480°C wurde vorerst das Gebiet des Sublimats mit 100 Molprozent CsCl stark verkürzt und dann weiterhin die Sublimate der Stufe 3 auf einen Gehalt von 76 Molprozent CsCl herabgedrückt, wie aus Figur 6 zu ersehen ist.

Figur 7 zeigt den analogen Verlauf der Sublimationen mit 1 g CsCl, RbCl 1:1 bei den Temperaturen von 430°C und 440°C. Infolge der hier leichter eintretenden Mischkristallbildung ist das Gebiet der Sublimate aus reinem CsCl ganz unterdrückt. Der Gehalt der Stufe 3 ist auf 62,5 Molprozent CsCl herabgedrückt.

Ein ähnlicher Verlauf der Sublimation wurde auch bei 455°C und 470°C beobachtet. Der Gehalt der Stufe 3 hat sich dabei weiter gesenkt auf 55 bzw. 54 Molprozent CsCl. Nur kleine Unterschiede in der Herstellung und Körnung

des Bodenkörpers können bereits den Verlauf der Sublimationstrennung deutlich beeinflussen.

Um grössere Trenneffekte durch die Sublimation zu erreichen, müsste offenbar die Herstellung der Ausgangsmischungen nicht durch Eindampfen, sondern durch möglichst rasche Fällung bei tiefen Temperaturen erfolgen, um die Bildung von Mischkristallen möglichst zu unterbinden. Nach der Abtrennung der aus reinem CsCl bestehenden Sublimate müsste dann der Bodenkörper zur

### Sublimation von CsCl/KCl-Mischungen

Mol%CsCl  
im Subl.

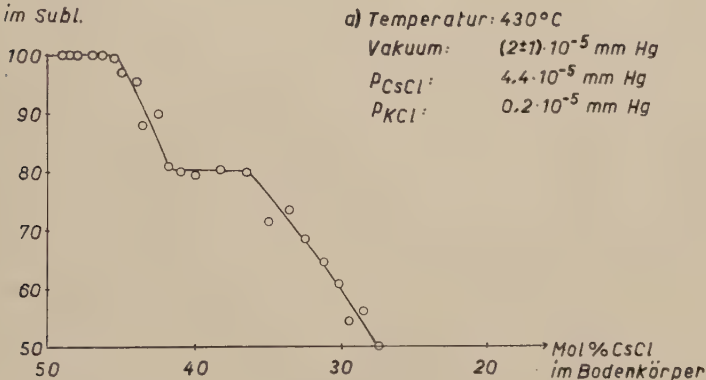
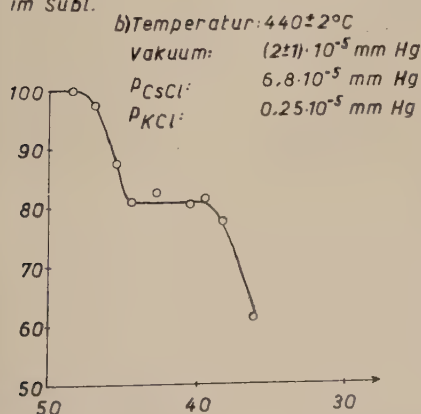


Fig. 5

### Sublimation von CsCl/KCl-Mischungen

Mol%CsCl  
im Subl.



c) Temperatur:  $480 \pm 3^{\circ}\text{C}$   
 Vakuum:  $(2 \pm 1) \cdot 10^{-5} \text{ mm Hg}$   
 $p_{\text{CsCl}}$ :  $38.7 \cdot 10^{-5} \text{ mm Hg}$   
 $p_{\text{KCl}}$ :  $1.75 \cdot 10^{-5} \text{ mm Hg}$

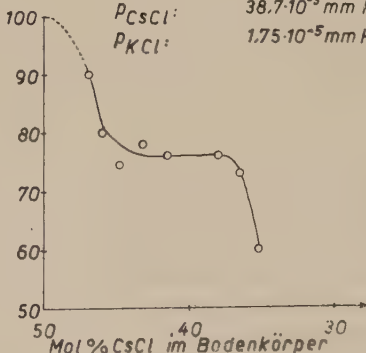


Fig. 6

Zerlegung der inzwischen darin gebildeten Mischkristalle erneut aus wässriger Lösung bei tiefen Temperaturen umkristallisiert werden. Versuche in dieser Richtung sind in Aussicht genommen. Über die angewandten Analysemethoden soll in anderem Zusammenhang berichtet werden.

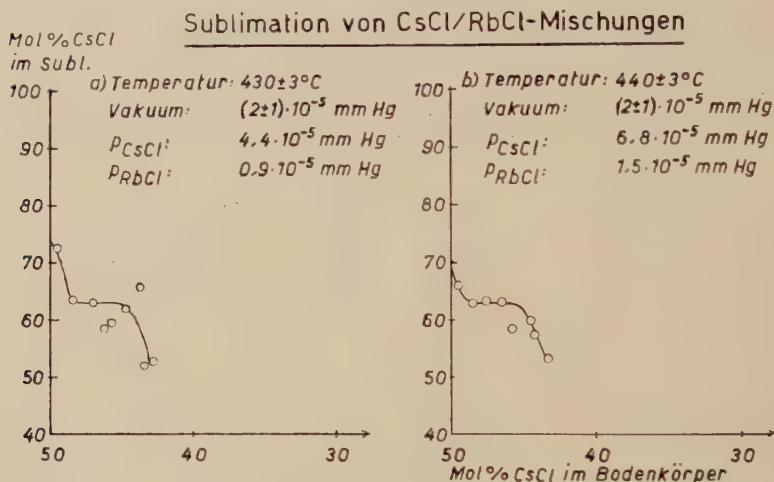


Fig. 7

### Zusammenfassung

Es sind die Dampfdrucke von CsCl, RbCl und KCl nach der Mitführungsmethode, unter Verwendung von Stickstoff als Transportgas, in den respektiven Temperaturbereichen von  $507^\circ\text{C}$ – $635^\circ\text{C}$  für CsCl, von  $558^\circ\text{C}$ – $675^\circ\text{C}$  für RbCl und von  $582^\circ\text{C}$ – $751^\circ\text{C}$  für KCl bestimmt worden.

Mit äquimolaren Gemischen aus CsCl mit KCl bzw. RbCl wurden Versuche zur Abtrennung des CsCl im Vakuum durchgeführt, wobei drei bis vier charakteristische Stufen auftreten, welche durch den Grad der Mischkristallbildung im Bodenkörper bedingt werden.

Ein Teil der benötigten Apparaturen konnte aus Mitteln des *Aluminium-Fonds Neuhausen* angeschafft werden. Der Fondskommission sei hierfür unser Dank ausgesprochen.

### Summary

The vapour pressures of CsCl, RbCl, and KCl have been determined with a transport method, using nitrogen as transport gas, the pressures having been measured in the following ranges of temperature: CsCl from  $507$ – $635^\circ\text{C}$ , RbCl from  $558$ – $675^\circ\text{C}$ , and KCl from  $582$ – $751^\circ\text{C}$ .

Results of fractionated sublimations with equimolar mixtures of CsCl with KCl, resp. RbCl are reported, which show three or four typical steps in the pressure curve, produced by a certain amount of mixed crystal formation in the residue.

(Eingegangen: 4. August 1953.)



## Über die kombinatorische und kontinuumsmässige Definition der Überschneidungszahl zweier geschlossener Kurven auf einer Fläche

VON HERMANN WEYL, Princeton, N. J.<sup>1)</sup>, und Zürich

Auf einer zweiseitigen Fläche bezeichnet man als Charakteristik zweier geschlossener Wege  $\alpha$ ,  $\beta$  die algebraische Summe der Überkreuzungen von  $\alpha$  über  $\beta$ , wobei in dieser Summe eine Überkreuzung von links nach rechts mit  $+1$ , von rechts nach links mit  $-1$  in Ansatz gebracht wird. Die Verkehrsregel des «Vorfahrrechts» beruht auf der Tatsache, dass eine Überkreuzung von  $\alpha$  über  $\beta$  von links nach rechts zugleich eine Überkreuzung von  $\beta$  über  $\alpha$  von rechts nach links ist. Dies besagt, dass die Charakteristik  $\text{ch}(\alpha, \beta)$  schiefssymmetrisch ist:

$$\text{ch}(\beta, \alpha) = -\text{ch}(\alpha, \beta). \quad (1)$$

Wenn man die Möglichkeiten bedenkt, die der allgemeine Begriff der stetigen Kurve offen lässt, so ist es klar, dass die Definition in der obigen Form unbrauchbar ist. Die kombinatorische Topologie ergreift den Ausweg, dass sie sich auf eine *Triangulation* der Fläche stützt, statt beliebiger Wege zunächst nur *Kantenzüge* ins Auge fasst und von da aus durch eine Art Approximation die allgemeine Situation zu meistern sucht. Ihr darin folgend, werden wir zu einer kombinatorischen Definition der Charakteristik für beliebige geschlossene Wege gelangen. Freilich erscheint der Begriff dadurch an eine Triangulation gebunden. Um zu zeigen, dass er in Wahrheit davon unabhängig ist, werde ich dann eine andere kontinuumsmässige Erklärung der Charakteristik aufstellen und zeigen, dass sie mit der kombinatorischen übereinstimmt. Das Verfahren ist eng mit demjenigen verwandt, das ich in meinem 1913 bei Teubner erschienenen Buch *Die Idee der Riemannschen Fläche* zur Einführung des Zusammenhangsgrades mit Hilfe der Integralfunktion benutzte. So wie die Integralfunktionen aus einer «Topologisierung» der Integrale analytischer Funktionen entspringen, ist die hier gegebene Kontinuumsdefinition der Charakteristik durch Topologisierung derjenigen Konstruktion entstanden, mit Hilfe deren ich an dem angegebenen Ort die abelschen Integrale erster Gattung gewann. Zur näheren Ausführung schreitend, muss ich zunächst an die wichtigsten Grundbegriffe der Topologie erinnern.

<sup>1)</sup> Institute for Advanced Study.

## Fläche

Eine *Mannigfaltigkeit* besteht aus Elementen, die Punkte genannt werden. Jedem Punkt  $p$  sind gewisse  $p$  enthaltende Teilmengen der Mannigfaltigkeit als *Umgebungen* von  $p$  zugeordnet, die den zuerst von F. HAUSDORFF vollzählig aufgestellten Axiomen genügen müssen:

1. Zu zwei Umgebungen von  $p$  gibt es immer eine Umgebung von  $p$ , die in beiden enthalten ist;
2. liegt  $p$  in der Umgebung  $U_0$  von  $p_0$ , so gibt es eine Umgebung von  $p$ , die ganz in  $U_0$  enthalten ist;
3. zwei verschiedene Punkte besitzen Umgebungen, die zueinander punktfremd sind.

Mit Hilfe der Umgebungen lassen sich alle Stetigkeitsbegriffe definieren, insbesondere der Begriff der topologischen Abbildung (so heisst ein Paar zueinander inverser Abbildungen  $p \rightarrow p'$ ,  $p' \rightarrow p$ , die beide stetig sind). Eine Mannigfaltigkeit wird als zweidimensionale *Fläche* bezeichnet, wenn sich jede Umgebung topologisch auf das Innere  $E$  des Einheitskreises der  $(x, y)$ -Ebene abbilden lässt. Dabei ist  $E$  natürlich selber als Mannigfaltigkeit dadurch definiert, dass als Umgebung eines Punktes  $p_0$  von  $E$  das Innere eines jeden um  $p_0$  beschriebenen, ganz in  $E$  gelegenen Kreises gilt. Eine *Kurve* (Weg) auf der Fläche  $\mathfrak{F}$  ist gegeben, wenn jedem Wert des in den Grenzen  $0 \leq \lambda \leq 1$  variierenden Parameters  $\lambda$  ein Punkt  $p(\lambda)$  von  $\mathfrak{F}$  in stetiger Weise zugeordnet ist. Wir legen der Fläche die Bedingung auf, *zusammenhängend* zu sein; das heisst, wir nehmen an, dass jeder Punkt auf  $\mathfrak{F}$  mit jedem durch eine Kurve verbunden werden kann. Einer der wichtigsten Stetigkeitsbegriffe ist der der *kompakten Menge* (eine Zeitlang, während das Wort kompakt in anderm Sinne verwendet wurde, hiessen sie bikompakt). Eine Punktmenge  $M$  auf  $\mathfrak{F}$  ist kompakt, wenn folgendes der Fall ist: Ist jedem Punkt  $p$  von  $M$  irgendwie eine Umgebung  $U(p)$  von  $p$  zugeordnet, so lassen sich stets endlichviele Punkte  $p$  unter den Punkten von  $M$  auswählen, deren zugeordnete Umgebungen  $U(p)$  ganz  $M$  bedecken. Für Flächen, die selber kompakt sind, ist der Name *geschlossen* in Gebrauch. In diesem Sinne ist zum Beispiel die Kugeloberfläche geschlossen, die Ebene nicht.

## Orientierung

Sei  $A$  ein Punkt der  $(x, y)$ -Ebene,  $\mathfrak{C}$  eine nicht durch  $A$  hindurchgehende Kurve in der Ebene. Wir bezeichnen mit  $2\pi q(p)$  den Winkel, den der Strahl  $A\dot{p}$  von  $A$  nach einem variablen Punkt  $p$  auf  $\mathfrak{C}$  mit einer festen, von  $A$  ausgehenden Halbgeraden einschliesst.  $q(p)$  ist nur modulo 1 eindeutig bestimmt. Man kann aber die *stetige* Änderung von  $q(p)$  verfolgen, während  $p$  die Kurve  $\mathfrak{C}$  durchläuft; der Zuwachs, welchen  $q$  dabei erfährt, wird eine ganze Zahl  $n$  sein. Wir werden sagen, dass  $\mathfrak{C}$  den Punkt  $A$  im ganzen  $n$ -mal im positiven Sinne

umschlingt oder dass  $n$  die *Ordnung* von  $A$  in bezug auf  $\mathfrak{C}$  ist. Entscheidend für das Vorzeichen von  $n$  ist, dass ein bestimmter Drehungssinn in der Ebene als positiver zugrunde gelegt ist. Sind die Punkte  $A$  und  $B$  durch eine stetige,  $\mathfrak{C}$  nicht treffende Kurve miteinander verbunden, so hat  $B$  dieselbe Ordnung in bezug auf  $\mathfrak{C}$  wie  $A$ . Es gilt der folgende fundamentale Satz: Es sei ein ebenes Gebiet  $\mathfrak{G}$  auf ein anderes  $\mathfrak{G}'$  topologisch abgebildet. Der Punkt  $A$  in  $\mathfrak{G}$  gehe durch diese Abbildung in  $A'$  über. Zu einem gegebenen Drehsinn  $\partial$  in  $A$  gehört dann ein Bild-Drehsinn  $\partial'$  in  $A'$ , der so zu kennzeichnen ist: Wenn  $\mathfrak{C}$  irgendeine  $A$  nicht passierende geschlossene Kurve ist, die in dem ganz zu  $\mathfrak{G}$  gehörigen Innern  $\mathfrak{R}$  eines Kreises um  $A$  verläuft, so stimmt die auf Grund von  $\partial'$  ermittelte Ordnung von  $A'$  in bezug auf die Bildkurve  $\mathfrak{C}'$  von  $\mathfrak{C}$  stets mit der auf Grund von  $\partial$  ermittelten Ordnung von  $A$  in bezug auf  $\mathfrak{C}$  überein.

Hierauf beruht die Möglichkeit, einen Drehsinn  $\partial$  in einem Punkte  $p_0$  einer gegebenen *Fläche*  $\mathfrak{F}$  festzulegen, indem man ihn in dem topologischen Bild irgendeiner Umgebung von  $p_0$  festlegt. Ein den sämtlichen Punkten  $p$  von  $\mathfrak{F}$  zugewiesener Drehsinn  $\partial(p)$  wird *stetig* in  $p_0$  heissen, wenn er im topologischen ebenen Bild einer hinreichend kleinen Umgebung von  $p_0$  überall als der *gleiche* Drehsinn erscheint. Eine Fläche heisst *zweiseitig* oder orientierbar, wenn sich auf ihr ein einheitlicher Drehsinn festlegen lässt, das heisst, wenn sich jedem Punkt ein solcher Drehsinn zuweisen lässt, dass derselbe überall stetig ist. Durch diese Festlegung wird die Fläche zur *orientierten Fläche*. Indem wir eine Drehung im positiven Sinne als «Wendung linksum» bezeichnen, gelingt es auf einer orientierten Fläche (aber nur auf einer solchen), die Unterscheidung zwischen links und rechts durchzuführen. Die Kugeloberfläche ist zum Beispiel zweiseitig, die projektive Ebene, die aus ihr durch Identifizierung antipodischer Punkte entsteht, ist es nicht. Wir beschäftigen uns fortan nur mit zweiseitigen Flächen.

### Integralfunktion

Eine *Kurvenfunktion*  $F$  ist gegeben, wenn jeder Kurve  $\gamma$  auf der Fläche  $\mathfrak{F}$  eine reelle Zahl  $F(\gamma)$  zugeordnet ist. Aus einer von  $a$  nach  $b$  führenden Kurve  $\gamma'$  und einer von  $b$  nach  $c$  führenden Kurve  $\gamma''$  kann man die von  $a$  nach  $c$  führende Kurve  $\gamma = \gamma' + \gamma''$  zusammensetzen. Die Kurvenfunktion ist *linear*, wenn unter diesen Umständen stets

$$F(\gamma' + \gamma'') = F(\gamma') + F(\gamma'')$$

ist. Die Kurvenfunktion  $F$  heisst *kohomolog Null*,  $F \sim 0$ , falls  $F(\gamma) = 0$  ist für jede geschlossene Kurve  $\gamma$ . Alsdann existiert eine Punktfunktion  $f(p)$ , so dass für irgendeine von  $a$  nach  $b$  führende Kurve  $\gamma$  die Gleichung

$$F(\gamma) = f(b) - f(a)$$

gilt. Wir beschäftigen uns mit solchen linearen Kurvenfunktionen, die im kleinen überall kohomolog Null<sup>1</sup> sind; das heisst, zu jedem Punkt  $p_0$  soll eine Umgebung existieren, derart dass  $F(\gamma) = 0$  gilt für jede in dieser Umgebung verlaufende geschlossene Kurve  $\gamma$ . Derartige lineare Kurvenfunktionen mögen *Integralfunktionen* heissen. Mehrere Integralfunktionen  $F_1, \dots, F_l$  sind linear abhängig, wenn es nicht sämtlich verschwindende reelle Zahlen  $c_1, \dots, c_l$  gibt, so dass die Relation

$$c_1 F_1 + \dots + c_l F_l \sim 0$$

besteht. Die Maximalzahl der linear unabhängigen Integralfunktionen auf einer Fläche heisst ihr *Zusammenhangsgrad* (derselbe kann natürlich auch unendlich sein). In dieser von mir 1913 aufgestellten, von jeder Triangulation unabhängigen Definition tauchte wohl zum erstenmal der Gedanke auf, die Homologietheorie der geschlossenen Wege auf die «Kohomologietheorie» der Integralfunktionen zu gründen. Zwischen mehreren geschlossenen Wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  besteht die Homologie

$$c_1 \gamma_1 + \dots + c_l \gamma_l \simeq 0,$$

wenn für jede Integralfunktion  $F$  die Gleichung

$$c_1 F(\gamma_1) + \dots + c_l F(\gamma_l) = 0$$

besteht. Führt man formal lineare Kombinationen  $c_1 \gamma_1 + \dots + c_l \gamma_l$  geschlossener Wege  $\gamma_i$  als «*Ströme*» ein, so bilden die Ströme und die Integralfunktionen zwei zueinander duale Vektorräume. Der Zusammenhangsgrad ist zugleich die Maximalzahl der im Sinne der Homologie linear unabhängigen geschlossenen Wege.

Ich will die Integralfunktion  $F$  *beschränkt* nennen, wenn es eine kompakte Teilmenge  $M$  auf  $\mathfrak{F}$  gibt, so dass  $F(\gamma) = 0$  ist für jede ganz ausserhalb  $M$  verlaufende Kurve  $\gamma$ . Die zwischen geschlossenen Wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  bestehende *schwache Homologie*

$$c_1 \gamma_1 + \dots + c_l \gamma_l \sim 0$$

bedeutet, dass

$$c_1 F(\gamma_1) + \dots + c_l F(\gamma_l) = 0$$

ist für jede beschränkte Integralfunktion  $F$ . So kann man denn auch von einem schwachen Zusammenhangsgrad sprechen; er kann niemals grösser sein als der Zusammenhangsgrad. Zum Beispiel hat ein Kreisring in der Ebene den Zusammenhangsgrad 1, aber den schwachen Zusammenhangsgrad 0, indem ein zu den Rändern konzentrischer Kreis im Ring, obschon nicht homolog Null, doch schwach homolog Null ist. – Für geschlossene Flächen besteht natürlich kein Unterschied zwischen Homologie und schwacher Homologie.



## Triangulation

Ich komme jetzt zu dem für die kombinatorische Topologie grundlegenden Begriff der Triangulation und fasse diesen Begriff etwas schärfer als in dem oben zitierten Buch. Ein ebenes Dreieck lässt sich am leichtesten mit Hilfe der zu seinen Eckpunkten 1, 2, 3 gehörigen Schwerpunktskoordinaten beschreiben. Darum beginnen wir mit dieser Erklärung: Ein Dreieck  $\Delta$  auf  $\mathfrak{F}$  ist durch eine stetige Funktion  $p = \Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  gegeben, die jedem Tripel von reellen nicht-negativen Zahlen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  von der Summe 1 in stetiger Weise einen Punkt  $p$  auf  $\mathfrak{F}$  zuordnet, in solcher Weise, dass verschiedenen Tripeln stets verschiedene Punkte  $p$  korrespondieren. Von der Gesamtheit der den angegebenen Bedingungen genügenden reellen Zahlentripel sprechen wir auch als von dem *Zahl-dreieck*  $Z = Z_\xi$ .  $\xi_1 = 0$  definiert die Kante 1 des Dreiecks,  $(1, 0, 0)$  ist die Ecke 1,  $(0, 1/2, 1/2)$  die Mitte der Kante 1,  $(1/3, 1/3, 1/3)$  der Mittelpunkt des Dreiecks. Da  $Z$  kompakt ist, ist auch sein stetiges Abbild  $\Delta$  kompakt, und nach einem wichtigen Satz über die stetige Abbildung kompakter Mengen ist nicht nur die Abbildung  $Z \rightarrow \Delta$ , sondern auch die inverse  $\Delta \rightarrow Z$  stetig. Man beachte, dass ein Dreieck auf der Fläche nicht als Menge der zu ihm gehörigen Punkte definiert ist, sondern durch die  $Z$  auf  $\Delta$  stetig abbildende Funktion  $\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Zur *Triangulation* einer Fläche gehört, dass auf ihr gewisse Punkte  $e$  als Ecken ausgezeichnet sind, die in gewisser Weise zu Paaren (= Kanten)  $(ef)$  und zu Tripeln (= Dreiecken)  $(efg)$  zusammengefasst sind. Zu einem Paar  $(ef)$  gibt es genau zwei Ecken  $g$ , so dass  $ef$  mit  $g$  ein Tripel bilden. Zu einer Ecke  $e$  gibt es nur endlichviele von  $e$  verschiedene Ecken  $f = f_1, \dots, f_r$  derart, dass  $(ef)$  als Kante auftritt. Diese bilden einen Zykel, indem  $ef_i$  die gemeinsame Kante der beiden Dreiecke

$$\Delta_{i-1} = (ef_{i-1}f_i) \quad \text{und} \quad \Delta_i = (ef_i f_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, r; f_0 = f_r, f_{r+1} = f_1)$$

ist. Zu jedem vorkommenden Tripel  $(efg)$  gehört eine stetige Funktion

$$p = \Delta_{efg}(\xi_e, \xi_f, \xi_g),$$

die jedem zulässigen, das heisst den Bedingungen

$$\xi_e \geq 0, \quad \xi_f \geq 0, \quad \xi_g \geq 0, \quad \xi_e + \xi_f + \xi_g = 1$$

genügenden Wertetripel  $(\xi_e, \xi_f, \xi_g)$  einen Punkt  $p$  auf der Fläche so zuordnet, dass verschiedenen Tripeln verschiedene Punkte entsprechen. Die Funktion definiert das Dreieck  $\Delta_{efg}$  der Triangulation. Die Bezeichnung ist so zu verstehen, dass, wenn  $efg$  im Index des Funktionszeichens  $\Delta$  und zugleich als Indizes der Variablen  $\xi_e, \xi_f, \xi_g$  der gleichen Permutation unterworfen werden, der Wert  $p$  der Funktion sich nicht ändert. Auf den beiden Dreiecken  $\Delta_{efg}, \Delta_{efg'}$

mit der gemeinsamen Kante  $ef$  gelte

$$\Delta_{efg}(\xi_e, \xi_f, 0) = \Delta_{efg'}(\xi_e, \xi_f, 0).$$

Damit ist also die die Kante  $(ef)$  definierende Funktion  $p - \delta_{ef}(\xi_e, \xi_f)$  eindeutig erklärt. Für jedes vorkommende Tripel  $(efg)$  mit der Ecke  $e$  gelte  $\Delta_{efg}(1, 0, 0) = e$ . Jeder Punkt der Fläche erscheint als Wert mindestens einer dieser den Tripeln  $(efg)$  zugehörigen Funktionen  $\Delta_{efg}$ . Die Topologie kommt in den folgenden Forderungen zum Ausdruck: Zu einem inneren Punkt eines Dreiecks

$$\Delta_{efg}: \xi_e > 0, \xi_f > 0, \xi_g > 0,$$

gibt es eine Umgebung, deren Punkte keinem andern als diesem Dreieck angehören; zu einem innern Punkt einer Kante  $\delta_{ef}: \xi_e > 0, \xi_f > 0$ , gibt es eine Umgebung, in der keine andern Punkte liegen als solche, die den beiden Dreiecken  $\Delta_{efg}, \Delta_{efg'}$  mit der gemeinsamen Kante  $ef$  angehören (Dreieckspaar); zu einem Eckpunkt  $e$  gibt es eine Umgebung, zu der keine andern Punkte als solche gehören, die in dem zyklischen Stern der Dreiecke

$$\Delta_0 = \Delta_{ef_1f_2}, \dots, \Delta_{r-1} = \Delta_{ef_{r-1}f_r}$$

um  $e$  liegen.

Für die Folge nehmen wir an, dass die Fläche  $\mathfrak{F}$  in einer bestimmten Triangulation  $\zeta$  vorliegt.

Der Umstand, dass eine Fläche *zusammenhängend* ist, gibt sich jetzt in der kombinatorischen Eigenschaft kund, dass die Ecken sich in keiner Weise so in zwei Klassen teilen lassen, dass nur Paare und Tripel solcher Ecken vorkommen, die der gleichen Klasse angehören. Eine Fläche ist dann und nur dann *geschlossen*, wenn das Schema der Triangulation nur aus *endlichvielen* Ecken (und darum auch aus nur endlichvielen Kanten und Dreiecken) besteht. Ein einheitlicher, auf der Fläche festgelegter Drehsinn gibt sich in jedem Dreieck  $\Delta_{efg}$  der Triangulation dadurch kund, dass ihm eine bestimmte der beiden *Indikatrizen* (Ecken-Reihenfolgen)  $efg - fge - gef$  oder  $gfe - feg - egf$  zugewiesen ist; in solcher Weise, dass die Indikatrizen zweier in einer Kante zusammenstossender Dreiecke  $(efg)$  und  $(efg')$  kohärent sind. Die Indikatrix  $efg$  eines Dreiecks induziert auf den begrenzenden Kanten je einen Durchlaufungssinn  $ef, fg, ge$ . *Kohärente* Indikatrizen der in einer Kante  $ef$  zusammenstossenden beiden Dreiecke induzieren auf der gemeinsamen Kante *entgegengesetzte* Durchlaufungssinne. Jedesmal ist hier eine Kontinuumseigenschaft (zusammenhängend, geschlossen, orientierbar) in eine kombinatorische umgesetzt; und es ergibt sich daraus, dass die betreffende kombinatorische Eigenschaft von der Triangulation unabhängig ist.

Aus der Beschreibung geht ferner hervor, dass das Innere des um eine Ecke  $e$  sich gruppierenden Dreieckssterns  $\Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_{r-1}$  sich topologisch auf das

Innere eines ebenen regulären Polygons so abbilden lässt, dass die von  $e$  ausgehenden, in den Dreiecken verlaufenden geradlinigen Strahlen in geradlinige Strahlen in der Ebene übergehen («Strahlabbildung»). Da das Innere eines solchen Polygons einfach zusammenhängend, nämlich dem Inneren eines Kreises topologisch äquivalent ist, gilt  $F(\gamma) = 0$  für eine jede Integralfunktion  $F$  und eine jede geschlossene Kurve  $\gamma$ , die ganz im Innern des Dreieckssterns verläuft.

Ein *Kantenzug*  $e_0 e_1 e_2 \dots e_n$  (der Länge  $n$ ) ist eine Folge von Kanten unserer Triangulation, in welcher der Endpunkt  $e_i$  der ( $i$ -ten) Kante  $e_{i-1} e_i$  zugleich der Anfangspunkt der nächsten Kante  $e_i e_{i+1}$  ist. Der Kantenzug ist *einfach*, wenn alle seine Ecken  $e_0, e_1, \dots, e_n$  voneinander verschieden sind. Er ist *geschlossen*, wenn  $e_n$  mit  $e_0$  zusammenfällt. Statt der Kanten, welche die Ecken miteinander verbinden, kann man auch die *Cokanten* (sit venia verbo!)  $\kappa^*$  betrachten, deren jede die Mittelpunkte  $i, i'$  der beiden Dreiecke  $\Delta, \Delta'$  eines Dreieckspaares miteinander verbindet;  $\kappa^*$  besteht aus der Strecke  $ic$  in  $\Delta$ , die von  $i$  zu der Mitte  $c$  der den beiden Dreiecken gemeinsamen Kante  $\kappa$  läuft, und aus der Strecke  $ci'$  in  $\Delta'$ . Da wir annehmen, dass unsere Fläche zweiseitig ist, können wir jedem Dreieck der Triangulation eine positive Indikatrix so erteilen, dass die beiden Dreiecke eines Dreieckspaares stets kohärente Indikatrizien bekommen. Eine Kante  $\kappa = \vec{ee'}$  sei mit dem durch die Schreibweise angedeuteten Durchlaufungssinn versehen; von den beiden Dreiecken  $\Delta, \Delta'$  mit der gemeinsamen Kante  $ee'$  sei  $\Delta$  dasjenige, dessen positive Indikatrix auf  $\kappa$  den Durchlaufungssinn  $\vec{ee'}$  induziert. Wir sagen dann, dass die oben beschriebene Cokante  $\kappa^*$ , von  $i$  nach  $i'$  durchlaufen, die Kante  $\kappa$  *von links nach rechts* (oder im positiven Sinne) überkreuzt.

### Ansatz des Problems

Jetzt sind wir in der Lage, anzudeuten, wie wir das Problem der Charakteristik in Angriff nehmen wollen. Wenn  $\beta$  ein geschlossener Cokantenzug und  $\alpha$  ein geschlossener Kantenzug ist, so ist der Begriff der algebraischen Summe der Überkreuzungen von  $\beta$  über  $\alpha$  vollkommen klar. Wir hoffen, dass folgende Tatsachen wahr sind: Jede geschlossene Kurve ist sowohl einem geschlossenen Kantenzug wie einem geschlossenen Cokantenzug homolog. Wenn immer  $\alpha, \alpha'$  zwei zueinander homologe geschlossene Kantenzüge und  $\beta, \beta'$  zwei homologe geschlossene Cokantenzüge sind, besteht die Gleichung

$$\text{ch}(\beta, \alpha) = \text{ch}(\beta', \alpha').$$

Damit ist es dann möglich,  $\text{ch}(\beta, \alpha)$  für irgend zwei geschlossene Wege  $\alpha, \beta$  dadurch zu definieren, dass man  $\alpha$  durch einen beliebigen zu  $\alpha$  homologen geschlossenen Kantenzug,  $\beta$  durch einen beliebigen zu  $\beta$  homologen geschlossenen Cokantenzug ersetzt. Wir hoffen endlich, dass die so allgemein erklärte

Charakteristik das Gesetz der Antisymmetrie (1) erfüllt. Freilich haben wir uns den Nachweis dieses Faktums dadurch erschwert, dass wir die beiden Argumente  $\alpha$ ,  $\beta$  ungleichartig behandeln, nämlich für  $\alpha$  Kantenzüge, für  $\beta$  Cokantenzüge einsetzen.

*Der Poincarésche Formalismus.* Man erteile willkürlich jeder Kante  $\kappa$  einen bestimmten «positiven» Durchlaufungssinn und der zugehörigen Cokante  $\kappa^*$  einen solchen, dass sie  $\kappa$  von links nach rechts überkreuzt. Ein geschlossener Kantenzug  $\alpha$  durchläuft jede Kante  $\kappa$  in summa eine bestimmte Anzahl von Malen  $x_\kappa$ , wobei eine positive Durchlaufung mit  $+1$ , eine negative mit  $-1$  in Ansatz gebracht wird. Wir schreiben symbolisch  $\alpha = \sum x_\kappa \kappa$  und sprechen von  $\alpha$  als einem *Zykel* in dem Sinne, dass zwei geschlossene Kantenzüge  $\alpha$  und  $\alpha'$  identifiziert werden, wenn sie gleiche Durchlaufungszahl,  $x_\kappa = x'_\kappa$ , für eine jede Kante  $\kappa$  haben. Von den ganzen Zahlen  $x_\kappa$  verschwinden alle bis auf endlichviele. Sei  $\kappa = \overrightarrow{ee'}$ . Wir setzen für eine beliebige Ecke  $a$ :  $\varepsilon(a \kappa) = +1$ , wenn  $a = e'$ ,  $\varepsilon(a \kappa) = -1$ , wenn  $a = e$ ,  $\varepsilon(a \kappa) = 0$ , wenn  $a$  verschieden von  $e$  und  $e'$  ist. Die Bedingung der Geschlossenheit bedeutet, dass unser Kantenzug  $\alpha$  in irgendeine Ecke  $a$  ebensooft ein- wie ausläuft, und das drückt sich in der Gleichung aus:

$$\sum_{\kappa} \varepsilon(a \kappa) x_\kappa = 0. \quad (2)$$

Ist  $\Delta$  irgendein Dreieck, so setzen wir  $\varepsilon(\kappa \Delta) = 0$ , ausser wenn  $\Delta$  eines der beiden Dreiecke  $\Delta_1, \Delta_2$  mit der gemeinsamen Kante  $\kappa$  ist. Hingegen setzen wir  $\varepsilon(\kappa \Delta_1) = +1$ ,  $\varepsilon(\kappa \Delta_2) = -1$ , wenn die positive Indikatrix von  $\Delta_1$  auf  $\kappa$  den positiven, die von  $\Delta_2$  den negativen Durchlaufungssinn induziert. Es besteht für jede Ecke  $a$  und jedes Dreieck  $\Delta$  der Triangulation die Gleichung

$$\sum_{\kappa} \varepsilon(a \kappa) \varepsilon(\kappa \Delta) = 0. \quad (3)$$

Ein geschlossener Cokantenzug kann als ein *Cozykel*  $\sum y_\kappa \kappa^*$  angesprochen werden, indem man angibt, wie oft er,  $y_\kappa$ -mal, in summa die Cokante  $\kappa^*$  im positiven Sinne durchläuft. Die Geschlossenheit des Cozykels findet in den Gleichungen

$$\sum_{\kappa} y_\kappa \varepsilon(\kappa \Delta) = 0 \quad (4)$$

ihren Ausdruck. Dies ist die Weise, wie H. POINCARÉ uns gelehrt hat, das kombinatorische Schema der Triangulation den Methoden der linearen Algebra zu unterwerfen. Schreibt man die Zahlen  $\varepsilon(a \kappa)$  als eine Matrix  $E$ , in welcher  $a$  der Zeilen-,  $\kappa$  der Spaltenindex ist, die Zahlen  $x_\kappa$  als eine Spalte  $x$ , die Zahlen  $y_\kappa$  als eine Zeile  $y$ , die Grössen  $\varepsilon(\kappa \Delta)$  endlich als eine Matrix  $E^*$  mit  $\kappa$  als Zeilen- und  $\Delta$  als Spaltenindex, so lauten die Gleichungen (2), (3) und (4) im Matrizenkalkül beziehungsweise

$$E x = 0, \quad E E^* = 0, \quad y E^* = 0.$$



Der Cozykel  $\beta = \sum y_{\kappa} \kappa^*$  überschneidet den Zykel  $\alpha = \sum x_{\kappa} \kappa$  so oft, wie die folgende Charakteristik angibt:

$$\text{ch}(\beta, \alpha) = \sum y_{\kappa} x_{\kappa} = y \cdot x.$$

### Algebraisierung der Integralfunktionen

Eine Integralfunktion  $F$  ordnet jeder Cokante  $\kappa^*$  einen bestimmten Wert  $f_{\kappa} = F(\kappa^*)$  zu. Da der geschlossene Cokantenzug, der die um eine Ecke  $a$  herumliegenden Elementardreiecke

$$\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{r-1} \quad (\Delta_r = \Delta_0)$$

von Mittelpunkt zu Mittelpunkt miteinander verbindet, im Innern des einfach zusammenhängenden Dreieckssterns verläuft, muss der Wert von  $F$  für diesen Zug, das ist

$$\sum \varepsilon(a, \kappa) f_{\kappa} = 0 \quad (5)$$

sein. Der Wert  $F(\beta)$  der Integralfunktion  $F$  für den Cozykel  $\beta = \sum y_{\kappa} \kappa^*$  ist  $\sum y_{\kappa} f_{\kappa}$ . Ich behaupte zweierlei:

1. Durch die Bestimmungszahlen  $f_{\kappa}$  ist die Integralfunktion im Sinne der Kohomologie eindeutig festgelegt.
2. Unter der Voraussetzung, dass sie den sämtlichen, den Ecken  $a$  entsprechenden Gleichungen (5) genügen, können diese Bestimmungszahlen beliebig vorgegeben werden.

Daraus folgt, dass es zu jedem Zykel  $\alpha = \sum x_{\kappa} \kappa$  eine beschränkte Integralfunktion  $F_{\alpha}$  gibt (mit den Bestimmungszahlen  $f_{\kappa} = x_{\kappa}$ ), so dass für beliebige geschlossene Cozykel  $\beta = \sum y_{\kappa} \kappa^*$  die Gleichung

$$F_{\alpha}(\beta) = \text{ch}(\beta, \alpha)$$

besteht. Da der Wert  $F_{\alpha}(\beta)$  sich nicht ändert, wenn man  $\beta$  durch irgendeinen ihm schwach homologen geschlossenen Weg ersetzt, überträgt sie die Definition der Charakteristik  $\text{ch}$  sofort von Cozykeln auf beliebige geschlossene Wege  $\beta$  und liefert das Gesetz

$$\text{ch}(\beta, \alpha) = \text{ch}(\beta', \alpha)$$

für irgend zwei geschlossene Wege  $\beta, \beta'$ , die einander schwach homolog sind; insbesondere  $\text{ch}(\beta, \alpha) = 0$ , wenn immer  $\beta \sim 0$ . Jedoch bleibt das Argument  $\alpha$  einstweilen auf Zykeln beschränkt. Da die Gleichungen (5) ganzzahlige Koeffizienten besitzen, ist jede beschränkte Integralfunktion einer linearen Kombination endlichvieler beschränkter Integralfunktionen kohomolog, deren Bestimmungszahlen  $f_{\kappa}$  ganze Zahlen sind. Darum gilt auch die umgekehrte Tatsache:

A. Hat ein geschlossener Weg  $\beta$  die Eigenschaft, dass  $\text{ch}(\beta, \alpha) = 0$  ist für jeden Zykel  $\alpha$ , so ist  $\beta$  schwach homolog Null.

Um die beiden oben erwähnten Tatsachen betreffend die Bestimmungszahlen einer Integralfunktion zu erweisen, haben wir an erster Stelle zu zeigen, dass jeder geschlossene Weg  $\gamma$  einem Cozykel homolog ist. Da jeder Punkt der Fläche im Innern mindestens eines Dreieckssterns liegt, folgt aus den Grundlagen der Analysis, dass sich  $\gamma$  in endlichviele Teilbögen

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \quad (\gamma_{n+1} = \gamma_1)$$

zerlegen lässt, deren jeder ganz im Innern eines Dreieckssterns verläuft. Aufeinanderfolgende Bögen, die im gleichen Stern liegen, vereinigen wir zu einem einzigen Teilbogen. Dann hat der Dreiecksstern  $\Sigma_1$ , innerhalb dessen  $\gamma_1$  liegt, ein Dreieckspaar mit demjenigen Stern gemein, in welchem  $\gamma_2$  liegt. Der Endpunkt  $a_2$  von  $\gamma_1$ , welcher zugleich der Anfangspunkt von  $\gamma_2$  ist, liegt in einem,  $\Delta$ , der beiden Dreiecke dieses Paares (liegt er in beiden, so nehmen wir für  $\Delta$  eines davon). Wir hängen dann an  $\gamma_1$  die in  $\Delta$  verlaufende Strecke an, die von  $a_2$  nach dem Mittelpunkt  $i$  von  $\Delta$  führt, und bringen dieselbe im umgekehrten Sinne durchlaufene Strecke vor  $\gamma_2$  an. Sei  $F$  eine Integralfunktion. Durch das geschilderte Verfahren verwandeln sich die Bögen  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  durch Hinzufügung je einer Strecke am Anfang und am Ende in Bögen  $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots$ , die je innerhalb eines Sterns vom Mittelpunkt eines Dreiecks zum Mittelpunkt eines andern führen. Dabei bleibt die Summe

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$$

ungeändert und damit auch der Wert von  $F(\gamma)$ , da ja die zwischengeschalteten Strecken, zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, sich aufheben. Der im Stern  $\Sigma_1$  vom Mittelpunkt des Dreiecks  $\Delta$  zum Mittelpunkt des Dreiecks  $\Delta'$  führende Weg  $\gamma'_1$  kann durch einen dieselben beiden Punkte verbindenden, im Dreiecksstern im einen oder andern Sinne herumlaufenden Cokantenzug  $\gamma''_1$  ersetzt werden, und wegen des einfachen Zusammenhangs des Sterns ist dabei  $F(\gamma'_1) = F(\gamma''_1)$ . So erhalten wir schliesslich einen geschlossenen Cokantenzug  $\gamma'' = \gamma'_1 + \gamma'_2 + \dots$ , der homolog  $\gamma$  ist; denn er genügt für jede Integralfunktion  $F$  der Gleichung  $F(\gamma) = F(\gamma'')$ . Ebenso ergibt sich, dass jeder geschlossene Weg homolog einem geschlossenen Kantenzug ist.

Die zweite Tatsache, dass die Zahlen  $f_x$  unter Einhaltung der sämtlichen Bedingungen (5) beliebig vorgegeben werden können, ergibt sich etwa so. Für die  $r$  in  $a$  mündenden Kanten  $\kappa_1, \dots, \kappa_r$  setzen wir  $f_i = \varepsilon(a, \kappa_i) f_{\kappa_i}$ . Dann ist die Summe  $f_1 + \dots + f_r = 0$ , und es lassen sich also Zahlen  $g_0, \dots, g_{r-1}$  ( $g_r = g_0$ ) so finden, dass  $f_i = g_i - g_{i-1}$ . Im positiv umlaufenen Zykel der Dreiecke mit der Ecke  $a$  trennt  $\kappa_i$  das Dreieck  $\Delta_{i-1}$  von  $\Delta_i$ . Wir ordnen dann den inneren Punkten  $p$  von  $\Delta_i$  den Funktionswert  $g(p) = g_i$  zu, den inneren Punkten  $p$  der

Kante  $\varkappa_i$  den Wert

$$g(p) = \frac{1}{2} (g_{i-1} + g_i) ,$$

schliesslich dem Zentrum  $a$  den Wert

$$g(a) = \frac{1}{r} (g_0 + \dots + g_{r-1}) .$$

Für eine Kurve  $\gamma$ , die innerhalb dieses Sterns vom Punkte  $p$  zum Punkte  $p'$  läuft, setze man

$$F(\gamma) = g(p') - g(p) .$$

In die Definition von  $g(p)$  geht eine willkürliche additive Konstante ein, die aber bei der Bestimmung von  $F(\gamma)$  wieder herausfällt. Liegt der Kurvenbogen  $\gamma$  in zwei Dreieckssternen, die dann ein Dreieckspaar gemein haben, so ist der resultierende Wert  $F(\gamma)$  auch unabhängig davon, welchen dieser beiden Sterne man der Berechnung zugrunde legt. Ist schliesslich  $\gamma$  irgendeine Kurve, geschlossen oder nicht, so teile man sie in endlichviele Bögen  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), deren jeder ganz in einem Dreiecksstern verläuft, und bilde dann

$$F(\gamma) = F(\gamma_1) + \dots + F(\gamma_n) .$$

Dieser Wert ist von der benutzten Teilung unabhängig, wie man sofort sieht, wenn man zwei Einteilungen in Bögen überlagert. Auf diese Weise erhält man eine Integralfunktion  $F$  mit den Bestimmungszahlen  $f_\varkappa$ .

### Berechnung des Zusammenhangsgrades einer geschlossenen Fläche

$F$  ist dann und nur dann homolog Null, wenn sich jedem Elementardreieck  $\Delta$  eine Zahl  $g_\Delta$  so zuordnen lässt, dass allgemein für die von  $\Delta$  nach  $\Delta'$  führende Cokante  $\varkappa^*$  der Wert  $F(\varkappa^*) = f_\varkappa$  gleich  $g_{\Delta'} - g_\Delta$  wird; oder

$$f_\varkappa = -\sum_{\Delta} \varepsilon(\varkappa, \Delta) g_\Delta . \quad (6)$$

Im Falle einer geschlossenen Fläche seien die Anzahlen der Ecken, Kanten und Dreiecke  $e$ ,  $f$  und  $d$ . Als dann hat man  $f$  Unbekannte  $f_\varkappa$ , denen die  $e$  Gleichungen (5) auferlegt sind. Da zwischen ihren linken Seiten nur eine Identität besteht, nämlich diejenige mit den Koeffizienten  $\lambda_a = 1$ , so ist die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen  $f - e + 1$ . Auf der andern Seite ist die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen, die aus (6) mittels beliebiger Zahlen  $g_\Delta$  hervorgehen, gleich  $d - 1$ . Der Überschuss

$$(f - e + 1) - (d - 1) = f - e - d + 2$$

ist darum die Maximalzahl  $h$  der linear unabhängigen Integralfunktionen, und daraus folgt, dass diese «Eulersche Charakteristik»  $\mathfrak{f} - \mathfrak{e} - \mathfrak{d} + 2$  von der Triangulation der Fläche unabhängig ist.

### Ein Satz über primitive geschlossene Wege

Für geschlossene Flächen kann der Satz A in bemerkenswerter Weise verschärft werden. Wir nennen einen geschlossenen Weg  $\beta$  *primitiv*, wenn er nicht dem Vielfachen  $n\gamma$  ( $n = 2$  oder  $3$  oder  $4$  oder ...) eines geschlossenen Weges  $\gamma$  homolog ist. Ich behaupte:

A'. Zu einem primitiven Weg  $\beta$  gibt es einen Zykel  $\alpha$ , für den  $\text{ch}(\beta, \alpha) = 1$  ist (der also von  $\beta$  in summa genau einmal überkreuzt wird).

*Beweis.* Zykeln  $\alpha$  und Cozykeln  $\beta$  werden durch ihre  $\mathfrak{f}$  Durchlaufungszahlen  $x_\alpha$  bzw.  $y_\beta$  gekennzeichnet; die  $x_\alpha$  werden als Spalte  $x$ , die  $y_\beta$  als Zeile  $y$  geschrieben und  $x$  und  $y$  als Vektoren in zueinander dualen Vektorräumen angesehen, für welche das innere Produkt

$$\sum y_\alpha x_\alpha = y \cdot x$$

eine invariante Bedeutung hat. Die Vektoren mit ganzzahligen Koordinaten sollen Gittervektoren heissen. Werden die Koordinaten  $x_\alpha$  einer beliebigen unimodularen Transformation unterworfen (das ist einer linearen Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Determinante  $= \pm 1$  ist), so bleibt die Kennzeichnung der Gittervektoren als der Vektoren mit ganzzahligen Koordinaten erhalten. Werden die Koordinaten  $y_\beta$  des Vektors  $y$  der kontragredienten linearen Transformation unterworfen, so bleibt auch der Ausdruck des inneren Produkts der gleiche:

$$y \cdot x = y_1 x_1 + \dots + y_l x_l.$$

Man kann nach dem Verfahren, das von MINKOWSKI als Adaptation eines Gitters an ein enthaltenes bezeichnet wurde, eine unimodulare Transformation im  $x$ -Raum so ausführen, dass die den Gleichungen (2) genügenden «geschlossenen» Vektoren  $(x_1, \dots, x_l)$  durch das Verschwinden der  $\mathfrak{f} - l$  letzten Koordinaten gekennzeichnet sind. Mit andern Worten: Wir bekommen  $l$  Zykel  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  so, dass jeder Zykel sich in einer und nur einer Weise als eine Summe  $\sum_{i=1}^l x_i \alpha_i$  mit ganzzahligen Koeffizienten  $x_i$  schreiben lässt. Man führe die kontragrediente Transformation im dualen  $y$ -Raum aus. Wegen der Gleichung  $E E^* = 0$  für die Matrizen  $E$  und  $E^*$  verschwinden nach dieser Transformation in jeder Spalte von  $E^*$  die letzten  $\mathfrak{f} - l$  Glieder, das heisst die letzten  $k - l$  Zeilen von  $E^*$  sind mit Nullen besetzt. Die die Geschlossenheit eines  $y$ -Vektors zum Ausdruck bringenden Gleichungen (4) im dualen Raum betreffen demnach nur die Koordinaten  $y_1, \dots, y_l$ ; und nach einer geeigneten unimodularen Transformation dieser  $l$  Koordinaten besagen jene Gleichungen, dass die letzten  $l - h$  der



Koordinaten  $y_1, \dots, y_l$  verschwinden. Nachdem  $x_1, \dots, x_l$  der kontragredienten Transformation unterworfen sind, nehmen die geschlossenen Gittervektoren im  $x$ -Raum die Form

$$(x_1, \dots, x_h, x_{h+1}, \dots, x_l, 0, \dots, 0)$$

an, die im  $y$ -Raum die Form

$$(y_1, \dots, y_h, 0, \dots, 0, y_{l+1}, \dots, y_t),$$

und die Charakteristik wird

$$\text{ch}(\beta, \alpha) = y \cdot x = y_1 x_1 + \dots + y_h x_h. \quad (7)$$

Der Cozykel  $\beta$  wird dann und nur dann homolog Null sein, wenn dieser Ausdruck für beliebige ganzzahlige Werte von  $x_1, \dots, x_l$  verschwindet, das heisst, wenn  $y_1 = \dots = y_h = 0$  ist. Wir haben also  $h$  Cozykel  $\beta_1, \dots, \beta_h$  gefunden, so dass jeder geschlossene Weg  $\beta$  homolog einer eindeutig bestimmten *ganzzahligen* linearen Kombination  $y_1 \beta_1 + \dots + y_h \beta_h$  derselben ist, und damit erweist sich  $h$  als der Zusammenhangsgrad.  $\beta$  ist primitiv, falls  $y_1, \dots, y_h$  den grössten gemeinsamen Teiler 1 besitzen. Dann kann man aber ganze Zahlen  $x_1, \dots, x_h$  und damit einen Zykel  $\sum_{i=1}^h x_i \alpha_i$  finden, für welche (7) gleich 1 wird, und damit ist unser Satz bewiesen.

### Das Gesetz der Antisymmetrie

Wir haben die Regel angegeben, nach welcher der Wert der zum Zykel  $\alpha = \sum_{\kappa} x_{\kappa} \kappa$  gehörigen Integralfunktion

$$F_{\alpha}(\beta) = \text{ch}(\beta, \alpha)$$

für einen beliebigen Weg  $\beta$  zu berechnen ist. Hier spezialisieren wir nun zunächst auch  $\beta$  als einen Zykel  $\sum y_{\kappa} \kappa$ . Eine Kante  $\kappa$  mit den beiden Endpunkten  $e, e'$  zerlegen wir durch ihre Mitte  $c$  in die zwei Halbkanten  $(\kappa e) = \overrightarrow{ce}$  und  $(\kappa e') = \overrightarrow{ce'}$ , so dass

$$\kappa = \sum_e \varepsilon(\vec{e} \kappa) (\kappa e).$$

Die  $r$  in  $e$  einmündenden Kanten, wie die Halbkanten  $\overleftarrow{c_i e}$ , numerieren wir in zyklischer Reihenfolge,  $e$  im positiven Sinne umlaufend, mit  $i = 1, \dots, r$ . Es ist zweckmässig, den Index  $i$  als einen solchen zu verstehen, der alle ganzen Zahlen durchläuft, aber so, dass Werte  $i$ , die einander kongruent modulo  $r$  sind, als gleich gelten. Die den in  $e$  *einlaufenden* Kanten  $\kappa_i$  zugehörigen Zahlen  $x_{\kappa}$ , genauer also die Zahlen  $\varepsilon(e \kappa_i)$   $x_{\kappa_i}$  wollen wir, wie schon früher, mit  $x_1, \dots, x_r$  bezeichnen. Ihre Summe ist 0, und wir können darum Zahlen  $g_i$  so bestimmen,

dass  $x_i = g_i - g_{i-1}$ . Der Beitrag zu  $F_\alpha(\beta) = \text{ch}(\beta \alpha)$ , der von den in  $e$  mündenden Halbkanten (der «Spinne in  $e$ ») herrührt, ist dann

$$w_e(\beta \alpha) = \sum_i y_i F_\alpha(\bar{c}_i \bar{e}) .$$

Hier ist

$$F_\alpha(c_i \bar{e}) = -\frac{1}{2} (g_i + g_{i-1}) + g ,$$

wo  $g$  der Mittelwert der  $r$  Zahlen  $g_0, \dots, g_{r-1}$  ist. Da auch die Summe  $\sum y_i = 0$  ist, können wir für diesen Beitrag schreiben:

$$= \frac{1}{2} \sum_i y_i (g_i + g_{i-1}) .$$

Eben wegen der Gleichung  $\sum y_i = 0$  kann die in die  $g_i$  eingehende willkürliche additive Konstante irgendwie gewählt werden, etwa gemäss  $g_0 = 0$ . Dann ist

$$\frac{1}{2} (g_i + g_{i-1}) = \sum_{j>i} x_j + \frac{1}{2} x_i = - \sum_{j<i} x_j - \frac{1}{2} x_i .$$

Daher kommt

$$w_e(\beta \alpha) = \sum_{1 \leq j < i \leq r} y_i x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r y_i x_i = - \sum_{1 \leq i < j \leq r} x_j y_i - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq r} x_i y_i . \quad (8)$$

Der von der Spinne in  $e$  herrührende Beitrag zur Charakteristik ist also eine halbganze Zahl. Wenn wir in der zweiten Formel die Indizes  $i$  und  $j$  vertauschen, so folgt ohne weiteres das für die Verkehrsregelung so wichtige *Gesetz der Antisymmetrie*

$$w_e(\beta \alpha) = -w_e(\alpha \beta) .$$

Setze einen Augenblick

$$L_m = \sum y_i x_j \quad (m+1 \leq j < i \leq m+r) .$$

Aus unserer Berechnung geht hervor, dass  $L_0$  unabhängig davon ist, wo wir im Zykel der Kanten, die in  $e$  hineinlaufen, mit der Numerierung durch die Ziffern 1 bis  $r$  beginnen. Dies ist sofort zu verifizieren. Denn  $L_m$  entsteht aus  $L_{m-1}$  dadurch, dass man

$$(y_{m+1} + \dots + y_{m+r-1}) x_m$$

fortlässt und dafür

$$y_{m+r} (x_{m+1} + \dots + x_{m+r-1})$$

hinzufügt, diese Terme sind aber beide gleich  $-y_m x_m$ . Darum ist  $L_0 = L_1 = L_2 = \dots$ .

Man mache sich klar, dass unsere Formel für die Schnittpunktmultiplizität  $w_e$  der beiden Zykeln  $\beta$  und  $\alpha$  in  $e$  dem entspricht, was man anschaulich erwartet. Ein der Fahrbahn  $\alpha$  folgendes Auto fahre längs der Strasse  $\kappa_i$  in die Kreuzung  $e$  hinein und verlasse sie längs  $\kappa_{i'}$ ; ein zweites Auto  $\beta$  komme zur gleichen Zeit längs der Strasse  $\kappa_j$  auf die Kreuzung zu und verlasse sie längs  $\kappa_{j'}$ . Dann wird man erwarten, dass die Schnittmultiplizität 0 ist, falls in der zyklischen Anordnung der in  $e$  einmündenden Strassen das Paar  $(\kappa_i, \kappa_{i'})$  das Paar  $(\kappa_j, \kappa_{j'})$  nicht trennt; man wird die Multiplizität  $\pm 1$  erwarten, falls die beiden Paare sich trennen, und zwar sollte 1 herauskommen, wenn  $\beta$  den Weg  $\alpha$  in  $e$  von links nach rechts überkreuzt,  $-1$  im entgegengesetzten Falle. Es kann aber auch geschehen, dass die beiden Autos die Kreuzung längs derselben Strasse verlassen. Dann ergibt unsere Formel einen Wert  $\pm 1/2$ . In der Tat bleibt in diesem Falle die Entscheidung, ob die eine Bahn die andere kreuzt, in  $e$  noch suspendiert. Erst wenn die Wege sich später in einer andern Kreuzung trennen, wird durch deren Beitrag  $\pm 1/2$  entschieden werden, ob Kreuzung stattgefunden hat (falls nämlich die Summe der beiden Beiträge nicht 0 ist), und wenn ja, in welchem Sinne. Unsere Formel umfasst in präziser algebraischer Form diese und alle andern Möglichkeiten.

Natürlich muss die über die Ecken  $e$  erstreckte Summe der Beiträge  $w_e(\beta, \alpha)$  eine ganze Zahl sein. Auch dies ist sofort zu verifizieren. Der möglicherweise halbganze Anteil von  $w_e$ ,  $(1/2) \sum y_i x_i$ , ist ja gleich

$$\frac{1}{2} \sum_{\kappa} \varepsilon(e, \kappa) y_{\kappa} \varepsilon(e, \kappa) x_{\kappa},$$

und darum ist die über alle Ecken  $e$  erstreckte Summe dieser Anteile

$$\frac{1}{2} \sum_{e, \kappa} \varepsilon^2(e, \kappa) y_{\kappa} x_{\kappa} \quad \text{wegen} \quad \sum_e \varepsilon^2(e, \kappa) = 2 \quad \text{gleich} \quad \sum_{\kappa} y_{\kappa} x_{\kappa}.$$

Das für Zykeln  $\alpha, \beta$  nunmehr erwiesene Gesetz der Antisymmetrie (1) ermöglicht es uns, in  $\text{ch}(\beta, \alpha)$  die Beschränkung von  $\alpha$ , und nicht bloss von  $\beta$ , auf geschlossene Kantenzüge aufzuheben. Seien nämlich  $\alpha_1, \alpha'_1$  zwei geschlossene Kantenzüge, welche dem geschlossenen Weg  $\alpha$  schwach homolog sind, und  $\beta_1$  ein Zykel, der schwach homolog dem geschlossenen Weg  $\beta$  ist. Dann gilt  $\alpha_1 \sim \alpha'_1$  und darum

$$\text{ch}(\beta_1, \alpha_1) = -\text{ch}(\alpha_1, \beta_1) = -\text{ch}(\alpha'_1, \beta_1) = \text{ch}(\beta_1, \alpha'_1),$$

folglich  $\text{ch}(\beta, \alpha_1) = \text{ch}(\beta, \alpha'_1)$ . Man kann demnach  $\text{ch}(\beta, \alpha)$  eindeutig dadurch definieren, dass man den geschlossenen Weg  $\alpha$  durch irgendeinen ihm schwach homologen Zykel ( $\alpha_1$  oder  $\alpha'_1$ ) ersetzt. Sind  $\alpha_1, \beta_1$  zwei Zykeln, die beziehungsweise den geschlossenen Wegen  $\alpha, \beta$  schwach homolog sind, so gilt dann  $\text{ch}(\beta, \alpha) = \text{ch}(\beta_1, \alpha_1)$ . Das Gesetz der Antisymmetrie bleibt für beliebige  $\alpha, \beta$

erhalten. Das Ziel einer universellen Definition der Charakteristik ist damit erreicht. Immerhin ist zu beachten, dass diese Definition *sich auf eine feste Triangulation  $\mathfrak{T}$  der Fläche  $\mathfrak{F}$  stützt*. Soll dies in Evidenz gesetzt werden, so schreibe man  $ch_{\mathfrak{T}}$  statt  $ch$ .

Ist die Fläche geschlossen und  $h$  ihr Zusammenhangsgrad, so können irgend  $h$  voneinander linear unabhängige geschlossene Wege  $\gamma_1, \dots, \gamma_h$  als eine Wegebasis benutzt werden, indem jeder geschlossene Weg  $\alpha$  homolog einer linearen Kombination  $x_1 \gamma_1 + \dots + x_h \gamma_h$  ist. Für dieses  $\alpha$  und  $\beta \sim y_1 \gamma_1 + \dots + y_h \gamma_h$  ergibt sich

$$ch(\beta, \alpha) = \sum_{i,j=1}^h \dot{s}_{ij} y_i x_j, \quad \dot{s}_{ij} = ch(\gamma_i, \gamma_j).$$

Der Satz A besagt, dass diese schiefsymmetrische bilineare «Charakteristikenform» nicht ausgeartet ist und dass somit ihre Determinante  $d = \det s_{ij}$  nicht verschwindet. Dies kann aber für eine schiefsymmetrische Form nur dann stattfinden, wenn die Dimension  $h$  gerade ist. *Darum ist der Zusammenhangsgrad  $h$  einer geschlossenen zweiseitigen Fläche stets eine gerade Zahl*; die ganze Zahl  $h/2$  heisst *Geschlecht*. Die Zahlen  $x_i$  sind nicht notwendig ganz, doch folgt aus den Gleichungen

$$ch(\gamma_i, \alpha) = \sum_{j=1}^h s_{ij} x_j,$$

dass sie ganze Zahlen dividiert durch  $d$  sind. Durch den schärferen Satz A' und seinen Beweis hat sich gezeigt, 1. dass die geschlossenen Wege eine *Integritätsbasis*  $\gamma_1, \dots, \gamma_h$  besitzen, so dass in der Homologie

$$\alpha \sim x_1 \gamma_1 + \dots + x_h \gamma_h$$

für jeden geschlossenen Weg  $\alpha$  die Koeffizienten  $x_i$  *ganze Zahlen* werden, und 2. dass bei Zugrundelegung einer solchen Basis  $d = 1$  wird. Aus dem letzten Umstand folgt, dass man die Integritätsbasis so wählen kann, dass die Charakteristikenform die *kanonische* Gestalt

$$(y_1 x_2 - y_2 x_1) + \dots + (y_{h-1} x_h - y_h x_{h-1})$$

annimmt (RIEMANNS «kanonische Rückkehrschnittpaare»).

Wir haben jetzt alle wesentlichen Eigenschaften der Charakteristik beisammen und möglichst einfach kombinatorisch abgeleitet. Um aber nun festzustellen, dass die Charakteristik in Wahrheit von der Triangulation, auf die sich ihre Definition stützte, unabhängig ist, benutze ich eine ganz andere Definition derselben, die für die funktionentheoretischen Anwendungen viel geeigneter ist und mir durch diese Anwendungen nahegelegt wurde. Zur Vorbereitung stellen



wir zunächst fest, dass die Charakteristik sich nicht ändert, wenn die Triangulation  $\zeta$  in gewisser elementarer Weise einer Unterteilung unterworfen wird.

### Unterteilungen

Sind  $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$  drei (nicht in einer Geraden liegende) Punkte ( $i=1, 2, 3$ ) im Zahlendreieck  $Z_\xi$  mit den Ecken 1, 2, 3, so wird durch die Substitution

$$\xi_i = \sum_j \alpha_{ij} \eta_j \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\eta_1 \geq 0, \eta_2 \geq 0, \eta_3 \geq 0, \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1,$$

ein Zahlendreieck  $Z_{\eta}$  als das Teildreieck von  $Z_\xi$  mit den Ecken  $a_1, a_2, a_3$  festgelegt. Eine Triangulation  $\zeta'$  ist eine *Unterteilung* der Triangulation  $\zeta$ , wenn die Elementardreiecke von  $\zeta'$  Teile der Elementardreiecke von  $\zeta$  sind. Wir wollen hier aber nur zwei ganz spezielle Typen von Unterteilungen betrachten. Ist  $a$  ein Punkt von  $Z_\xi$ , so zerlegen wir  $Z_\xi$  in die drei Dreiecke  $23a, 31a, 12a$ . Ist  $a$  nicht im Innern von  $Z_\xi$ , sondern etwa auf der Kante 23 gelegen, so fällt hier das erste Dreieck,  $23a$ , fort. Ist  $a$  ein innerer Punkt des Elementardreiecks  $\Delta$  der Triangulation  $\zeta$ , so führen wir die angegebene Teilung nur in diesem Dreieck aus. Ist aber  $a$  ein Kantenpunkt, so muss sie in den beiden an diese Kante anstossenden Dreiecken bewerkstelligt werden. Diese «*Elementarteilung erster Art*» wird dazu benutzt, um einen Punkt  $a$ , der noch nicht Eckpunkt ist, zu einem Eckpunkt der Triangulation zu machen. Die «*Elementarteilung zweiter Art*» ist die *Normalteilung*, durch welche  $Z_\xi$  in die vier Teildreiecke  $(23c_1), (31c_2), (12c_3), (c_1, c_2, c_3)$  zerlegt wird, wo

$$c_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad c_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad c_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Auf der Fläche wird diese Normalteilung in allen Elementardreiecken  $\Delta$  der gegebenen Triangulation  $\zeta$  gleichzeitig ausgeführt. Durch Iteration dieses Prozesses der Normalteilung erhält man Triangulationen, die schliesslich «*beliebig fein*» werden.

Geht die Triangulation  $\zeta'$  aus  $\zeta$  durch einen der beiden Elementarprozesse hervor, so ist ein  $\zeta$ -Kantenzug zugleich ein  $\zeta'$ -Kantenzug, und aus der Formel (8) für den Beitrag  $w_e$  geht ohne weiteres hervor, dass, wenn  $\alpha, \beta$  irgend zwei geschlossene  $\zeta$ -Kantenzüge sind, die Gleichung

$$\text{ch}_{\zeta'}(\beta, \alpha) = \text{ch}_{\zeta}(\beta, \alpha) \quad (9)$$

besteht. In der Tat, wird das Strassennetz einer Stadt durch neu angelegte Strassen erweitert, so kann man diese sowie die etwa dadurch neu entstehenden Kreuzungen ignorieren, *solange niemand die neuen Strassen benutzt*. Die Gleichung

chung (9) überträgt sich dann aber durch Homologie auf beliebige geschlossene Wege  $\alpha, \beta$ ; und in derselben Allgemeinheit gilt sogar die Regel

$$\text{ch}_{\zeta^*}(\beta, \alpha) = \text{ch}_{\zeta}(\beta, \alpha) \quad (10)$$

für eine Triangulation  $\zeta^*$ , die durch *wiederholte* elementare Unterteilungen aus  $\zeta$  entsteht.

### Die «Kontinuumsdefinition» der Charakteristik

zu welcher wir jetzt übergehen, benutzt keine Triangulation, sondern die Bedeckung einer Fläche mit Umgebungen und die topologische Abbildung der Umgebungen auf das Innere von Kreisen. Es sei  $\alpha$  eine gegebene geschlossene Kurve auf  $\mathfrak{F}$ . Durch endlichviele Teilpunkte

$$0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (n \neq 0)$$

werde sie so in Bögen

$$\alpha_1 = 01, \quad \alpha_2 = 12, \quad \dots, \quad \alpha_n = n-1, 0$$

geteilt, dass der Bogen  $\alpha_i$  in der Umgebung  $U_i$  eines Flächenpunktes liegt, und diese Umgebung sei durch die topologische Abbildung  $A_i$  auf das Innere  $E$  des Einheitskreises der  $(x, y)$ -Ebene bezogen. Wir nehmen zunächst  $i = 1$ . Es sei  $K$  das Innere eines zu  $E$  konzentrischen Kreises von einem Radius  $\varrho$ , der kleiner als 1, aber doch so gross ist, dass die beiden Punkte  $0, 1$ , oder vielmehr ihre durch die Abbildung  $A = A_1$  erzeugten Bilder noch in  $K$  liegen. Wir sprechen von  $K$  als der «geschrumpften Umgebung  $U = U_1$ ». Für einen von  $0$  und  $1$  verschiedenen Punkt  $p$  in  $E$  sei  $2\pi\varphi(p)$  der Winkel, um den man den Strahl  $\vec{p0}$  im positiven Sinne drehen muss, damit er in die Lage  $\vec{p1}$  kommt. ( $\varphi$  ist gleich  $\varphi_1 - \varphi_0$ , wenn  $2\pi\varphi_0, 2\pi\varphi_1$  die Winkel bedeuten, welche die Strahlen  $\vec{p0}, \vec{p1}$  mit der positiven  $x$ -Achse bilden.)  $\varphi(p)$  ist nur mod 1 bestimmt. Doch auf der Peripherie  $k$  von  $K$  ist  $\varphi(p)$  eine eindeutige stetige Funktion (deren Werte absolut kleiner als  $1/2$  sind). Diese kann man leicht als eine eindeutige stetige Funktion  $u(p)$  auf die ganze gelochte Fläche  $\mathfrak{F} - K$  so ausdehnen, dass sie ausserhalb einer kompakten Teilmenge von  $\mathfrak{F}$  verschwindet (zum Beispiel ausserhalb einer konzentrischen Kreisscheibe  $K_1$ , deren Radius  $> \varrho$ , aber  $< 1$  ist). Wir haben dann auf ganz  $\mathfrak{F}$  eine mehrdeutige stetige Funktion  $v(p)$ , die in  $K$  gleich  $\varphi(p)$  ist und deren Werte für irgendeinen nicht in  $K$  gelegenen Punkt  $p$  von  $\mathfrak{F}$  die Zahlen sind, die sich von  $u(p)$  um eine ganze Zahl unterscheiden<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Für die funktionentheoretischen Anwendungen ist es zweckmässig, dass zu  $v(p)$  noch irgendeine ausserhalb einer kompakten Menge verschwindende eindeutige stetige Funktion hinzugefügt wird.

Ist  $\beta$  irgendeine nicht durch  $0$  und  $1$  hindurchgehende Kurve, so kann man die stetige Änderung von  $v(p)$  längs dieses Weges verfolgen und erhält einen eindeutig durch  $\beta$  bestimmten Zuwachs  $s_1(\beta)$ . Dies liefert eine (beschränkte) Integralfunktion  $s_1$  auf  $\mathfrak{F}$  mit den *singulären Punkten*  $0$  und  $1$ ; das heisst eine Integralfunktion auf der «punktierten Fläche», die aus  $\mathfrak{F}$  entsteht, wenn man die beiden Punkte  $0$  und  $1$  heraussticht. Da  $v(p) \bmod 1$  eindeutig ist, ist  $s_1(\beta)$  für eine geschlossene (nicht durch  $0$  und  $1$  hindurchgehende) Kurve  $\beta$  eine ganze Zahl  $\nu$ ; diese gibt an, «wie oft der Weg  $\beta$  in summa im positiven Sinne zwischen  $0$  und  $1$  hindurchgeht». Von der besonderen Konstruktion der Funktion  $u(p)$  ist  $\nu$  unabhängig, da ja die Differenz der beiden, aus zwei verschiedenen Wahlen von  $u(p)$  entspringenden mehrdeutigen Funktionen  $v(p)$  eindeutig ist.

Indem wir dieselbe Konstruktion für jeden der Teilbögen  $\alpha_1 - 01$ ,  $\alpha_2 - 12$ , ... von  $\alpha$  ausführen, erhalten wir eine beschränkte Integralfunktion

$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

mit den Singularitäten  $0, 1, 2, \dots$ . Nach dem, was am Anfang bei Einführung des Drehsinns über die Invarianz der Ordnung gegenüber topologischen Abbildungen gesagt wurde, sind diese Singularitäten aber jetzt zu *hebbaren* Singularitäten geworden. Dies bedeutet, dass sich zum Beispiel um  $1$  eine – keine der von  $1$  verschiedenen Singularitäten enthaltende – Umgebung  $u_1$  abgrenzen lässt, derart, dass für jede in  $u_1$  verlaufende und  $1$  nicht passierende geschlossene Kurve  $\gamma$  die Integralfunktion  $s$  den Wert  $0$  hat<sup>1)</sup>. Daher existiert eine in allen Punkten  $p$  von  $u_1$  ausser in  $1$  definierte Punktfunktion  $\psi(p)$ , so dass für eine jede zwei Punkte  $p$  und  $p'$  verbindende, in  $u_1$  verlaufende Linie  $\gamma$ , die nicht durch  $0$  und  $1$  hindurchgeht,

$$s(\gamma) = \psi(p') - \psi(p)$$

ist. Der Umstand, dass wir an die Integralfunktionen keine Stetigkeitsforderungen gestellt haben, ermöglicht es uns, die Singularität im Punkte  $1$  einfach dadurch zu beseitigen, dass wir der Punktfunktion  $\psi$  daselbst irgendeinen bestimmten Wert geben, zum Beispiel  $\psi(1) = 0$ . Dann ist die Integralfunktion  $s(\beta)$  für beliebige Wege  $\beta$  definiert; ihr Wert für eine *geschlossene* Kurve  $\beta$  aber ist stets eine ganze Zahl. Diese ganze Zahl  $s_\alpha(\beta) = s(\beta, \alpha)$  bezeichnen wir jetzt als die *Charakteristik*  $s$ . Sie hängt von  $\alpha$  und  $\beta$  ab. In ihre Berechnung geht aber ausser der Kurve  $\alpha$  noch eine bestimmte Einteilung der Kurve  $\alpha$  in Teilbögen  $\alpha_i$  ein, ferner die Einbettung jedes Teilbogens  $\alpha_i$  in eine Umgebung  $U_i$  und deren topologische Abbildung  $A_i$  auf  $E$ . Es bleibt zu zeigen, dass das Resultat von diesen Hilfskonstruktionen unabhängig ist.

<sup>1)</sup> Denn  $1$  hat in beiden Abbildern  $A_1$  und  $A_2$  in bezug auf jede solche Kurve dieselbe Ordnung.

## Gleichheit der Charakteristiken $ch$ und $s$

Die Schritte, welche nötig sind, um die Übereinstimmung der Charakteristik  $s$  mit der früher auf Grund einer Triangulation  $\zeta$  definierten  $ch_\zeta$  zu erweisen, sind die folgenden.

1. Durch mehrere Elementarteilungen erster Art verwandelt man  $\zeta$  in eine feinere Triangulation, in welcher die Teilpunkte  $0, 1, 2, \dots$  zu Eckpunkten geworden sind. Indem man darauf den Prozess der Normalteilung hinreichend oft ausführt, bekommt man eine Triangulation  $\zeta^*$  von solcher Art, dass sich  $0$  und  $1$  innerhalb der geschrumpften Umgebung  $K$  durch einen einfachen  $\zeta$ -Kantenzug  $\alpha'_1 \quad 0ab \dots e1$  verbinden lassen und Entsprechendes auch für die andern Teilbögen gilt. Da  $\alpha_1 - \alpha'_1$  eine in  $K$  verlaufende geschlossene Kurve ist, gilt  $\alpha_1 - \alpha'_1 \simeq 0$ , und darum ist der geschlossene Kantenzug

$$\alpha' = \alpha'_1 + \dots + \alpha'_n$$

homolog  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Wir operieren weiter mit dieser Triangulation  $\zeta^*$ .

2. Ein einfacher Kantenzug wie  $\alpha'_1$  zerlegt die Fläche  $\mathfrak{F}$  nicht; das heisst, je zwei nicht auf  $\alpha'_1$  gelegene Punkte können durch eine  $\alpha'_1$  nicht treffende Kurve miteinander verbunden werden. Es folgt daraus auch, dass in der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\bar{K}$  (die aus  $K$  durch Hinzufügung seiner Peripherie  $k$  entsteht) jeder nicht auf  $\alpha'_1$  gelegene Punkt  $p$  von der Peripherie aus auf einem  $\alpha'_1$  nicht treffenden Wege erreicht werden kann. Durch stetige Fortsetzung längs dieses Weges erhält man von den auf  $k$  herrschenden Werten von  $\varphi$  aus einen bestimmten Wert  $\varphi(p)$  in  $p$ . Dieser ist unabhängig von dem Weg in  $\bar{K}$ , der von  $k$  aus zu  $p$  führt. In der Tat, sind  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Wege, die von den Punkten  $q_1$  bzw.  $q_2$  auf  $k$  zu  $p$  führen, so durchlaufe man  $\gamma_1$  rückwärts von  $p$  nach  $q_1$ , darauf den Bogen  $q_1 q_2$  auf  $k$  und schliesslich den Weg  $\gamma_2$  von  $q_2$  nach  $p$ . So entsteht eine geschlossene Kurve  $\mathfrak{C}$  in  $E$ , und unsere Behauptung ist, dass  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ , stetig längs  $\mathfrak{C}$  fortgesetzt, zu seinem Ausgangswert zurückkehrt oder dass  $0$  und  $1$  dieselbe Ordnung in bezug auf  $\mathfrak{C}$  haben. Das ergibt sich aber daraus, dass  $0$  und  $1$  durch die  $\mathfrak{C}$  nicht treffende Kurve  $\alpha'_1$  verbunden sind. Man erhält also eine in der längs  $\alpha'_1$  aufgeschnittenen Fläche  $\mathfrak{F}$  eindeutige stetige Funktion  $v(p)$ .

3. Den «Sprung» von  $v$  über eine Kante  $\varkappa$  der Triangulation  $\zeta^*$  kann man dadurch bestimmen, dass man je einen inneren Punkt  $p, p'$  im Innern der beiden längs  $\varkappa$  zusammenhängenden Dreiecke  $\Delta, \Delta'$  der Triangulation wählt, diese innerhalb  $\Delta + \Delta'$  durch eine Linie  $\gamma$  verbindet, und dann

$$s_1(\gamma) = \{v(p') - v(p)\}$$

bildet. Der Sprung über eine jede nicht zu  $\alpha'_1$  gehörige Kante ist  $0$ . Indem man den Dreiecksstern um  $1$  herum betrachtet, findet man mit Hilfe der Strahlabbildung dieses Sterns, dass der Sprung über die letzte zu  $\alpha'_1$  gehörige Kante  $e1$



gleich 1 ist; darauf, mittels des Dreieckssterns um  $e$ , dass der Sprung über die vorletzte Kante gleich dem über die letzte Kante, also auch  $-1$  ist; und so fort. Ist daher  $\beta^*$  ein geschlossener Kokantenzug, so ergibt sich als Wert  $s_1(\beta^*)$  die Anzahl von Malen, die  $\beta^*$  in summa die Kanten des Kantenzugs  $\alpha'_1$  im positiven Sinne überschreitet.

4. Durch Addition über  $i = 1, 2, \dots, n$  findet man daraus die Gleichung

$$s_\alpha(\beta^*) = \text{ch}(\beta^*, \alpha'),$$

wo die Berechnung der Charakteristik  $\text{ch}$  sich natürlich auf die Triangulation  $\zeta^*$  stützt. Ist jetzt  $\beta$  eine beliebige geschlossene Kurve und  $\beta^*$  ein  $\zeta^*$ -Cozykel, der homolog  $\beta$  ist, so folgt, da  $s_\alpha$  auf der linken Seite eine Integralfunktion ist und  $\alpha' \simeq \alpha$ ,

$$s_\alpha(\beta) = \text{ch}_{\zeta^*}(\beta, \alpha).$$

5. Endlich macht es die Gleichung (10) möglich, von der Triangulation  $\zeta^*$  auf die ursprüngliche  $\zeta$  zurückzugreifen:

$$s(\beta, \alpha) = \text{ch}_\zeta(\beta, \alpha).$$

Von links nach rechts gelesen, lehrt diese Gleichung, dass  $s(\beta, \alpha)$  von den an die Kurve  $\alpha$  anschliessenden Hilfskonstruktionen, die bei der Definition von  $s(\beta, \alpha)$  benutzt wurden, unabhängig ist; darauf lehrt sie, von rechts nach links gelesen, dass die Charakteristik  $\text{ch}_\zeta$  von der Triangulation  $\zeta$  unabhängig ist. Alle Eigenschaften von  $\text{ch}_\zeta$ , vor allem die schiefe Symmetrie, übertragen sich vermöge dieser Gleichung auf  $s(\beta, \alpha)$ .

Zur Bestimmung der Charakteristik stehen somit zwei Wege offen: der eine, «kombinatorische», benutzt eine Triangulation und approximiert die geschlossenen Kurven im Sinne der Homologie durch Zykeln (Kantenzüge) der triangulierten Fläche. Der andere, «kontinuumsmäßige», fragt, wie oft eine geschlossene Kurve zwischen zwei «nahe gelegenen» Punkten  $0$  und  $1$  hindurchgeht, und bestimmt diese Anzahl, indem sie die beiden Punkte in eine Umgebung einschliesst und diese topologisch auf das Innere eines ebenen Kreises abbildet. Auf Grund der zweiten Definition erkennt man übrigens leicht, dass die Charakteristik immer dann Null ist, wenn die beiden Wege  $\alpha, \beta$  sich nicht treffen. Es fragt sich, ob sich nicht aus der zweiten Definition die wesentlichen Eigenschaften der Charakteristik direkt ableiten lassen, ohne den Durchgang durch eine Triangulation. Dies ist in der Tat, wenigstens wenn man die Mannigfaltigkeit als differenzierbar annimmt, leicht möglich; durch die Ausführung dieses Gedankens bin ich zu der Überzeugung gekommen, dass für die Theorie der Riemannschen Flächen und der Funktionen und Integrale auf ihnen das Heranziehen der kombinatorischen Topologie ein Umweg ist, der sich nicht

lohnt. In einer in Vorbereitung begriffenen neuen Auflage meines alten Buches über Riemannsche Flächen wird dieser Erkenntnis Rechnung getragen werden.

Es lag mir daran, an diesem einfachen Begriff der algebraischen Schnittpunktszahl zweier geschlossener Kurven auf einer zweiseitigen Fläche zu zeigen, welche Schwierigkeiten der Mathematiker bei der präzisen Fassung solcher Begriffe antrifft und durch welche Methoden er sie überwindet. Ich hoffe, diese Ausführungen sind nicht ganz fehl am Platze in einem Heft, das dem Andenken PAUL NIGGLIS gewidmet ist, des Mannes, der so viel für die saubere Fassung der kristallographischen Grundbegriffe getan hat.

### Summary

The characteristic of two closed curves on an oriented surface is, roughly speaking, the algebraic sum of their intersections, counting a crossing from left to right as  $+1$ , a crossing in the opposite sense as  $-1$ . To make this definition precise, combinatorial topology replaces the surface by an aggregate of 0-, 1- and 2-cells and first assumes one curve to be a chain (joining the 0-cells), the other to be a co-chain (joining the 2-cells). The idea of homology (as defined by means of 'integral functions') and the law of antisymmetry then serve to pass from these specialized to arbitrary curves. This definition is here contrasted with another that arose from 'topologizing' the procedure by which the author in his *Idee der Riemannschen Fläche* (1913) constructed the Abelian integrals of the first kind: it makes no use of triangulation, but instead of the coverage of the surface by neighborhoods and their topological mapping onto circular disks. Finally the paper indicates the steps by which one proves the coincidence of both definitions.

(Eingegangen: 2. September 1953.)

---

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

---

### Zur Struktur von Hagelkörnern

Von R. LIST und M. DE QUERVAIN, Weissfluhjoch, Davos<sup>1)</sup>

Bei einem Gewitter mit Hagelschlag (24. Juni 1953) wurden auf dem Weissfluhjoch Hagelkörner aufgefangen und verschiedene Typen davon untersucht.

Der Hagelschauer war durch folgende meteorologische Daten gekennzeichnet:

Ort: Weissfluhjoch (2670 m ü. M.) ob Davos.

Allgemeine Wetterlage: Feuchtlabilität, Kaltluft in der Höhe, allgemein gewitterhaft; nachfolgende Frontgewitter. Vorliegender Hagelschlag gehörte der abschliessenden Kaltfront mit Gewittern an.

Temperatur: Absinkend von 13.20 h bis 21.30 h von  $6,1^{\circ}$  auf  $0,2^{\circ}\text{C}$ .

<sup>1)</sup> Eidgenössische Kommission zum Studium der Hagelbildung und Hagelabwehr (Forschungsstelle Weissfluhjoch).

Bewölkung: Cumulonimbus mit Altostratus 8–10/10. Bald nach dem Hagel-schlag Station im Nebel.

Wind: Um 15.30 h aus Nordwesten mit 4 m/s, bis 17.20 h bis 11 m/s anwachsend und auf Norden drehend; nach kurzer Flaute böige Winde aus Süden mit bis 22 m/s (17.23 h bis 17.35 h), mit Hagelschlag, dann Drehung nach West bis Nordwest und Abklingen des Windes auf 5 m/s (18.40 h).

Niederschlag: 10.50 h bis 16.02 h: Regen 0,9 mm

17.23 h bis 17.35 h: Hagel ohne Regen, dann etwas mit Regen  
vermischt

17.35 h bis 04.10 h: Regen mit Schnee

} 31 mm

Die aufgefangenen Körner, die zum Teil in den Figuren 1 bis 3 abgebildet sind, lassen sich morphologisch wie folgt klassieren:

1. Kugelige Körner aus transparentem Eis (Figur 1, Korn 3).
2. Kugelige bis eiförmige Körner mit opakem Kern und (dünner) transparenter Schale (Figur 1, Korn 5).
3. Kugelige Formen, in stumpfen Kegel auslaufend (Figur 1, Korn 1).
4. Kugelige, opake Körner mit transparenter Kalotte (Figur 2, Körner 7 und 9).
5. Opake traubige, «nierenartige» Formen (Figur 2, Körner 6 und 8).
6. Unregelmässige, teils ebenflächig begrenzte, durchsichtige Körner (Figur 1, Korn 4).
7. Kugelkalotten (Körner 10 und 12) und Schnitzformen (Körner 11 und 13), transparent bis teilweise opak (Figur 3).

Um über den innern Aufbau der gesammelten Hagelkörner nähere Aufschlüsse zu erhalten, wurden nach folgendem Verfahren von einzelnen Haupttypen Dünnschnitte hergestellt.

Das zu untersuchende Hagelkorn wird in eine gegenüber  $H_2O$  indifferente Flüssigkeit (Phthalsäurediäthylester), deren Erstarrungstemperatur einige Grade unter dem Gefrierpunkt von Wasser liegt, eingebettet. Bei einer Temperatur von  $-20^\circ C$  wird dann mittels einer Kreissäge eine Scheibe von 0,2–0,4 mm Dicke aus dem Korn geschnitten. Durch Verflüssigen und Lösen des Einbettungsmaterials wird ein transparentes Präparat für die mikroskopische Analyse gewonnen.

Die Dünnschnitte wurden so gut wie möglich durch das geometrische Zentrum sowie durch eventuell vorhandene Symmetrieachsen der Hagelkörner gelegt. Sie zeigen in durchfallendem weissem Licht, abgesehen von der Anordnung der Luftbläschen, keine auffallenden Strukturmerkmale; im polarisierten Licht jedoch werden, ähnlich dem Formenreichtum des äussern Aufbaues, verschiedene Strukturtypen sichtbar. Die Körner erweisen sich dabei als polykristallines Gefüge.

Nach der Grössenverteilung der Kristallite lassen sich folgende Unterscheidungen machen (siehe die Figuren 5, 7, 9, 11, 13 und 15):

1. Dünnschnitt, ein einziges grosses Korn enthaltend, dem zwei kleinere an- bzw. eingelagert sind (Figur 9).
2. Dünnschnitte mit zwei Gruppen von Gefügebestandteilen von deutlich verschiedener Korngrösse:
  - a) mit fächerartigem Aufbau, die kleinen Gefügebestandteile zusammengeballt im Fächerursprung, die grossen daran angelagert (Figuren 5 und 15);
  - b) mit radialsymmetrischer Anordnung der beiden Gruppen, im Zentrum kleine Gefügebestandteile (0,1–1,5 mm  $\varnothing$ ), daran angelagert grössere (1,5–4,0 mm  $\varnothing$ ), zum Beispiel Korn 8;
  - c) Übergangsformen von a zu b;
  - d) Dünnschnitte, bei denen ein deutliches Zentrum kleiner Gefügebestandteile im obigen Sinne fehlt (Figuren 7 und 13).

*Hagelkörner des Hagelschlages vom 24. Juni 1953 auf dem Weissfluhjoch*

Maßstab 1,3:1

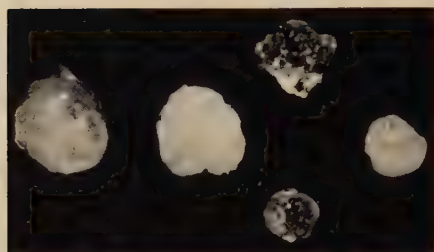


Fig. 1, Körner 1 bis 5

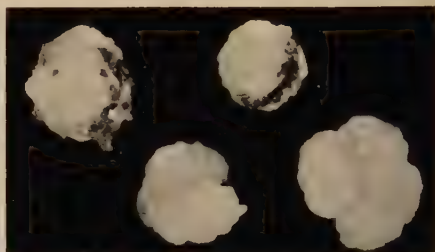


Fig. 2, Körner 6 bis 9



Fig. 3, Körner 10 bis 13



Fig. 4, Korn 1



Fig. 5, Korn 1

*Dünnschnitte von Hagelkörnern in durchfallendem bzw. polarisiertem Licht*

Maßstab 3,6:1



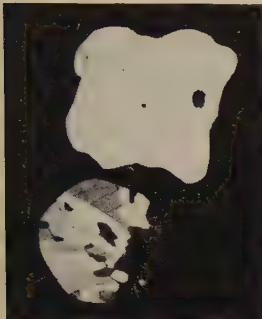


Fig. 9, Körner 3 und 4



Fig. 13, Korn 14

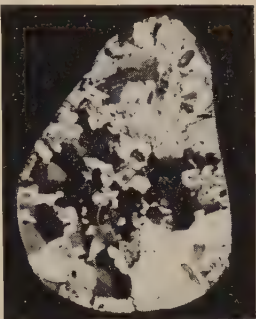


Fig. 17, Korn 16

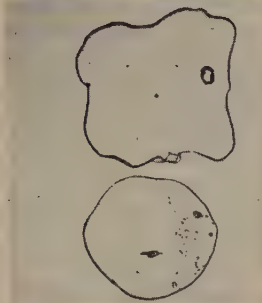


Fig. 8, Körner 3 und 4

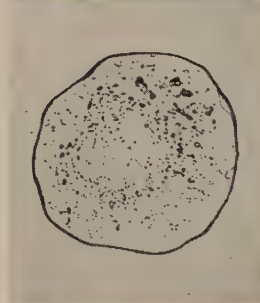


Fig. 12, Korn 14



Fig. 16, Korn 16

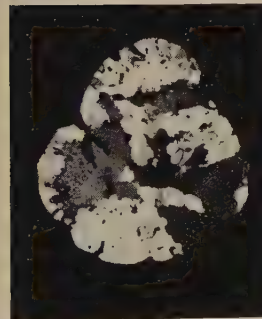


Fig. 7, Korn 2

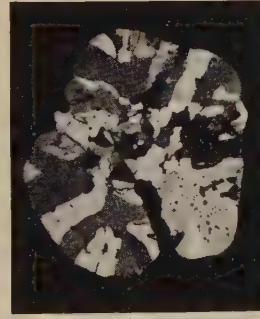


Fig. 11, Korn 6

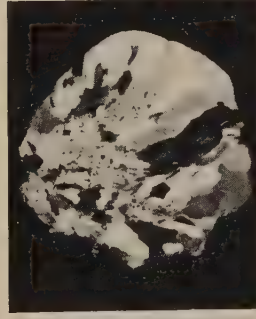


Fig. 15, Korn 15

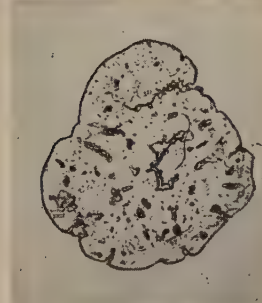


Fig. 6, Korn 2

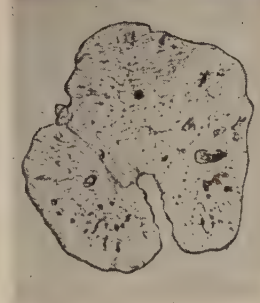


Fig. 10, Korn 6

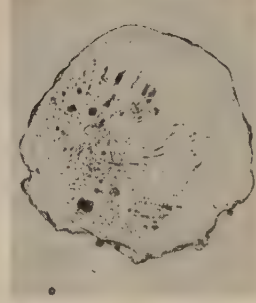


Fig. 14, Korn 15

Die Kategorie 2d dürfte davon herrühren, dass der Schnitt neben dem verhältnismässig kleinen Gefügekern vorbeiführt. Bei Hagelkörnern, die keine äussere Symmetrie aufweisen (Kugelgestalt oder ausgezeichnete Achse), wird die Anhäufung kleiner Kristalle nur zufällig vom Schnitt getroffen.

Zur gleichen Folgerung führt auch die Betrachtung der Bläschenstrukturen, insbesondere wenn wir von den Dünnschnitten der Hagelkörner 1 und 14 (Figuren 4 und 12) ausgehen. – Diese lassen vermuten, dass sich die Bläschen auf einem Kegel anhäufen, dessen Spitze im Bereich der kleinen Gefügebestandteile liegt. Figur 4 würde dabei einen Schnitt parallel zur Kegellachse (Hyperbelast) und Figur 12 einen solchen senkrecht zur Achse darstellen (Kreis). Andere untersuchte Schnitte mit ellipsenförmiger Anordnung der Bläschen erhärten diese Annahme. Bei den Körnern mit radialsymmetrischer Anordnung der Gefügebestandteilstgruppen (Typus 2b) sind solche Bläschenreihen nicht wahrscheinlich, da bevorzugte Häufungsorte dafür fehlen.

Ausgehend von bekannten Wachstumserscheinungen an Eis kann vermutet werden, dass die Bläschenreihen, die ohne sichtbare Beziehung zu den einzelnen Kristallen angeordnet sind, Wachstumsrichtungen innerhalb des Hagelkornes angeben. Die beiden Gruppen von Gefügebestandteilen können somit als zwei Generationen angesprochen werden. Ausgesprochen schalig angeordnete Bläschen haben eine andere Bedeutung, wie folgender Versuch nahelegt: Verschiedene natürliche Hagelkörner wurden, an einem Faden hängend, durch wiederholtes Eintauchen in Wasser künstlich vereist. Die tiefe Temperatur der Körner und deren Umgebung ( $-35^{\circ}\text{C}$ ) hatte zur Folge, dass der Gefrierprozess von der Korn- und der Wasseroberfläche zugleich ausging, wobei die Bläschen an die Stelle des Zusammentreffens der gegeneinanderwachsenden Eisschichten geschoben wurden, wie aus den Figuren 16 und 17 hervorgeht.

Aussagen über die Bildung der untersuchten Hagelkörner zu machen, dürfte schwierig sein, besonders bleibt die Entstehungsgeschichte des «Einkristalls» (Korn 4) im dunkeln. Bei den Körnern 6 und 8, die, äusserlich betrachtet, aus kleineren Körnern zusammengewachsen erscheinen (Figur 2), deutet ihr kristalliner Aufbau (zum Beispiel Figur 11) eher auf einheitliches Wachstum. (Die Linie, die in Figur 10 von der Einschnürung nach rechts oben verläuft, rührt von einem Bruch des Präparates her). Ob die Körner 10 bis 13 Splitterformen darstellen oder ob sie so gewachsen sind, lässt sich den entsprechenden Dünnschnitten nicht entnehmen. Die Körner mit kegelförmiger Anordnung der Bläschen sind möglicherweise aus konischen Graupeln entstanden, was die Ansicht von H. ISRAEL<sup>1)</sup> bestätigt.

Diese Bemerkungen zeigen, dass auf alle Fälle noch grössere und weitgehendere Untersuchungen notwendig sind, um sichere Angaben über Entstehung und Wachstum von Hagelkörnern zu machen.

### Summary

During a thunderstorm in the area of Weissfluhjoch hail stones have been collected for crystallographic investigation. Thin sections cut out of several specimens and inspected in polarized light reveal in all cases but one a polycrystalline structure of the hail stones. The normal pattern of the sections consists in a number of small crystals forming likely the centre of growth and in an adjacent or surrounding group of larger crystals.

(Eingegangen: 14. September 1953.)

<sup>1)</sup> H. ISRAEL, *Neuere Anschauungen und Versuche zur Erklärung der Hagelbildung*, Die Umschau in Wissenschaft und Forschung, 13. Heft (Juli 1953).

## Eine praktische Methode zur Transformation von Kristallstereogrammen in gnomonische Projektion

VON ROBERT L. PARKER, Zürich<sup>1)</sup>

Kugelprojektionen sind in der Kristallographie und Kristalloptik ein vielverwendetes Hilfsmittel zur Veranschaulichung räumlicher Lagenbeziehungen und zur graphischen Lösung rechnerischer Aufgaben. Als besonders wertvoll erweisen sich in diesem Zusammenhang die stereographische, gnomonische, orthographische und flächentreue azimutale Projektion. Auch wurde gelegentlich auf die Möglichkeit hingewiesen, gewisse Zylinderprojektionen zu verwenden. Während die stereographische Projektion heute ganz vorwiegend mit Hilfe eines äquatorialen Netzes (sogenanntes Wulffsches Netz) ausgeführt wird, sind die Methoden zum Entwerfen gnomonischer Projektionen weniger einheitlich. Das geht auch aus der Vielseitigkeit der von Zeit zu Zeit vorgeschlagenen Hilfsmittel hervor, wie Netze diverser Orientierung, Spezialmaßstäbe, Transporteure, Tabellen usw. Von den genannten Projektionsarten erweist sich die stereographische als die für kristallographische Zwecke im allgemeinen vielseitigste, doch bleiben die Zusammenhänge zwischen gnomonischer Projektion und dem die Kristallflächenentwicklung beherrschenden Rationalitätsgesetz von unübertroffener Einfachheit. So stellt sich denn bei der Bearbeitung eingemessener Kristallflächenkomplexe öfters das Bedürfnis ein, von einer angefertigten stereographischen Projektion zu einer gnomonischen zwecks Indizierung der Flächenlagen überzugehen. Dieser Schritt geschieht üblicherweise so, dass jedem stereographischen Punkt [mit Azimut  $\varphi$  und Zentralabstand  $d = R \operatorname{tg} (\varphi/2)$ ] ein gnomonischer Punkt (mit Azimut  $\varphi$  und Zentralabstand  $d' = R' \operatorname{tg} \varphi$ ) zugeordnet wird. Ein von F. RINNE<sup>2)</sup> veröffentlichtes stereognomonisches Netz kann zur Erleichterung dieser Konstruktion herangezogen werden.

Die hier zu erläuternde Methode zur Ausführung dieser Transformation beruht auf folgender Überlegung: Bringt man auf eine stereographische Projektion (mit Radius =  $R$ ) eine gnomonische (mit Radius =  $R'$ ) so zu liegen, dass die Zentren beider übereinstimmen, so wird jeder Pol des ersten Entwurfes, für welchen die Beziehung gilt

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{R'}{R} \operatorname{tg} \varphi,$$

mit seinem äquivalenten Pol im zweiten Entwurf zusammenfallen. Derartige Punkte liegen offenbar in beiden Projektionen auf einem Kleinkreis um das Zentrum, so dass gesagt werden kann, die aufeinandergelegten Projektionen haben einen Kleinkreis gemeinsam. Wird der stereographische Radius konstant gleich 10 gehalten, so entsprechen sich zum Beispiel folgende Werte von  $R'$  dem gnomonischen Radius und von  $\varphi$  dem Winkelradius des korrespondierenden Kleinkreises:

$R'$	3,33	3,00	2,00 usw.
$\varphi$	60,00°	64,42°	75,52° usw.

<sup>1)</sup> Mineralogische Sammlung ETH.

<sup>2)</sup> F. RINNE, Z. Krist. 65, 83 (1927).



Ist aber der korrespondierende Kleinkreis beider Projektionen festgelegt, so erfolgt die Transformation eines beliebigen Pols  $P$  der stereographischen Projektion in den entsprechenden Pol  $P'$  der gnomonischen Projektion (oder umgekehrt) gemäss der in Figur 1 angedeuteten Konstruktion, die sich folgendermassen begründen lässt: Der Pol  $P$  und der zu suchende Pol  $P'$  liegen auf dem gleichen Durchmesser des Entwurfes, weil dieser in beiden Projektionen in gleicher Weise vom Azimut der Fläche bestimmt wird. Punkt  $P$  liegt ausserdem auf einem bestimmten Grosskreis der stereographischen Projektion, der den korrespondierenden Kleinkreis in  $a$  und  $b$  schneidet. Diese Punkte gehören aber als solche auch der gnomonischen Projektion an, und in letzterer wird der Grosskreis durch  $a$  und  $b$  durch

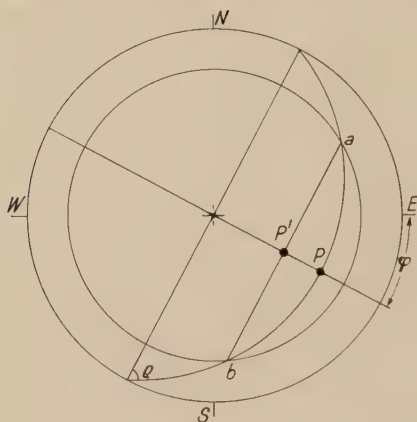


Fig. 1

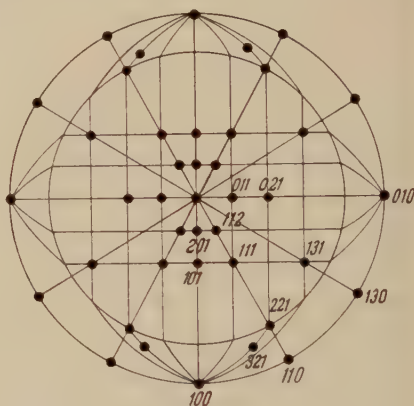


Fig. 2

die Gerade  $ab$  ersetzt. Der Schnittpunkt dieser Linie und des erwähnten Durchmessers ist also die Lage des gnomonischen Punktes  $P'$ .

Aus der Geometrie von Figur 1 geht hervor, dass die für die darzustellende Fläche geltenden Positionswinkel  $\varphi$  und  $\rho$  an den angedeuteten Stellen abgelesen werden können. Daraus folgt, dass der Punkt  $P'$  auf Grund vorgegebener Positionswinkel leicht gefunden werden kann, ohne dass  $P$  vorher eingetragen werden muss. Die Konstruktion kann also ausser zur Transformation der stereographischen in die gnomonische Projektion auch zur selbständigen Konstruktion einer gnomonischen Projektion mit Hilfe des stereographischen Netzes verwendet werden.

Aus den beschriebenen Beziehungen leitet sich die Möglichkeit ab, sämtliche Flächen eines Kristalls in einer kombinierten Projektionsfigur zur Darstellung zu bringen. Bis zu und mit einem frei wählbaren Grenzkreis (dem korrespondierenden Kleinkreis von oben) erfolgt die Darstellung gnomonisch, ausserhalb dieses Kreises und bis zum Grundkreis stereographisch. Figur 2, die die Flächenentwicklung eines Topaskristalls wiedergibt, zeigt den Aspekt einer solchen Darstellung.

Obgleich die Pole im äusseren (stereographischen) Gebiet einer nach Art und Maßstab von der inneren abweichenden Darstellungsweise angehören, so lassen sie sich mehrheitlich ebenfalls auf Grund des gnomonischen Maschennetzes indizieren. Das Verfahren hierzu zeigt Figur 3. Aus dieser geht hervor, dass im Gebiet der stereographischen Projektion die Teilgebiete  $a, b, c, d$  in bezug auf ihre



Stellung zum Grenzkreis unterschieden werden können. Für *a* gilt, dass jeder Punkt auf zwei Grosskreisen liegt, die Fortsetzungen des gnomonischen Maschensystems darstellen. Daraus ergibt sich die Stellung des Punktes im Maschensystem und folglich auch das Symbol. Punkte in den Gebieten *b* und *c* liegen je auf einem Grosskreis wie unter *a*, und ausserdem auf einer Diagonalen des Maschensystems. Sie sind somit ebenfalls indizierbar. Im Gebiet *d* liegen die Punkte nur auf einer solchen Diagonalen und sind somit nicht voll indizierbar. Auch für alle auf dem Grundkreis liegenden Pole gilt, dass sie nur von einer solchen Diagonalen getroffen werden. Weil aber der letzte Index in diesem Fall Null ist, kann für alle solche Lagen das Symbol voll aufgestellt werden.

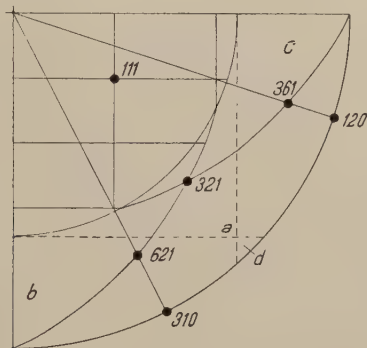


Fig. 3

Im praktischen Gebrauch hat sich diese Konstruktion sehr gut bewährt. Die kombinierten Darstellungen von der Art der Figur 2 bieten den entschiedenen Vorteil gegenüber gewöhnlichen gnomonischen Diagrammen, dass sie alle Flächenpole eines Kristalls in miteinander koordinierten Lagen zur Wiedergabe bringen.

### Summary

A method is described for transforming crystal stereograms into gnomonic projection. It is based on the fact that both projections have a small circle in common. The construction can also be used for the direct construction of gnomonograms if the positional angles of the faces are known. Combined gnomonostereograms connected by the common small circle may also be drawn.

(Eingegangen: 6. Juli 1953.)

## Kammeis, eine anomale Wachstumsform der Eiskristalle

Von SAMUEL STEINEMANN, Weissfluhjoch, Davos<sup>1)</sup>

Mit der Eindringung des Frostes in den Boden ist oft die bekannte Erscheinung des Kamm- oder Stengeleises verbunden [1] bis [6]<sup>2)</sup>. Die Bedingungen sind übereinstimmend die, dass durch die vorangehende Witterungsperiode (in unserem Falle waren es zwei Tage mit andauerndem Nebelregen bei Temperaturen knapp über 0°C) der Boden vollkommen durchnässt wird oder dass die Wasser-



Fig. 1

Kammeis in der Natur (1:2 verkleinert).

zufuhr in die obersten Erdschichten durch Grundwasser ausgiebig geschieht. Die Lufttemperaturen liegen knapp unter dem Nullpunkt, aber nicht tiefer als  $-5^{\circ}\text{C}$ , ansonst die wasserliefernden Poren an den Basen der Stengel, die anderweitig nicht in Kontakt mit der Schmelze kommen, geschlossen werden und das Wachstum aufhört. Am Morgen, an dem die Beobachtung gemacht wurde, herrschte auf dem Weissfluhjoch eine Lufttemperatur von  $-1,5^{\circ}\text{C}$ ; die mittlere Temperatur der vorhergehenden Nacht, in der das Kammeis entstand, mag etwa  $-2^{\circ}\text{C}$  gewesen sein. Die damals herrschende, sehr niedrige Feuchtigkeit von nur  $\sim 15\%$  ist sicher nicht von Bedeutung gewesen. Das Wachstum geschieht oft periodisch während der Nächte; am Tage tritt eine Schmelzung ein, oder das Wachstum schreitet bei höheren Temperaturen nicht weiter fort. In diesen Fällen resultiert dann eine sichtbar stufenweise Ausbildung. Das Wachstum einer Periode beträgt bis zu 4 cm.

Kammeis ist oft von einer gefrorenen Erdschicht bis zu einer Mächtigkeit von einigen Zentimetern überdeckt, die von den unterliegenden Kristallen abgehoben wird. Das Gewicht einer solchen Schicht betrug in unserer Beobachtung  $5\text{ g/cm}^2$ , was bei der allerdings etwas gewagten Annahme, dass die Hälfte dieser Fläche als

<sup>1)</sup> Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung, jetzt: Laboratoire suisse de Recherches horlogères, Neuenburg.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 506.

Querschnitt des Kammeises auftritt, zu einer Kraft von 10 g pro Quadratzentimeter effektive Fläche führt. Die Arbeitsleistung einer während der Nacht um 2 cm vordringenden Kammeisschicht berechnet sich so zu 20 000 erg pro Quadratzentimeter effektiven Eisquerschnitt. Andere Beobachter sprechen sogar von gehobenen Steinen bis zu 2 kg.



Fig. 2

Grobe Bündel des Kammeises in polarisiertem Licht (natürliche Grösse).

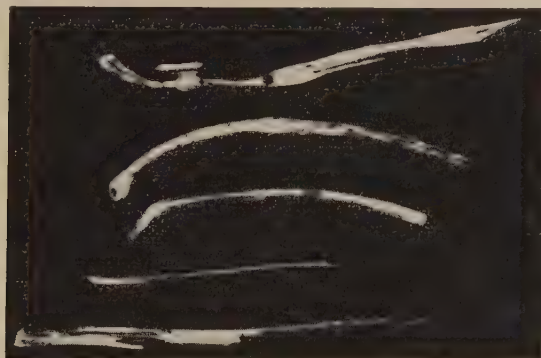


Fig. 3

Feine Fibern des Kammeises in polarisiertem Licht (natürliche Grösse).

Es ist natürlich nicht zu erwarten, dass die einzelnen Fibern, die teilweise gekrümmt und vielfach stufenförmig gebaut sind (Figuren 2 und 3), aus Einkristallen bestehen, wie auch DOENITZ [3] beobachtet. Dünnschliffe (Figuren 4 und 5) und auch die strenge Formregelung der prismatisch-stengeligen Kristallite mit einem Verhältnis der Quer- zur Längsdimension von im Mittel rund 0,2 zeigen dies sehr deutlich, indem sich die grössere Dimension in die Längsrichtung legt. Die Beobachtungen von KENNGOTT [1] und DOENITZ [3] beschreiben die Fibern als hexagonale Prismen. Damit würde sich die Längsachse der Kristallite mit der Lage der optischen Achse identifizieren. Wenn auch an einzelnen Stengeln hier durchaus scharfe Begrenzungen auftraten, die aber nicht als von hexagonalem

Habitus bezeichnet wurden, so ist die Mehrzahl der Kristallite doch allotriomorph befunden worden. Es gibt wohl eine Form von stengeligem Eis, das in einem evakuierten Gefäß aus der mit einer dünnen Eisschicht bedeckten Wasseroberfläche herauswächst, einkristallin ist und hexagonalen Habitus hat [7]. Das Wachstum ist aber als solches aus der Dampfphase dort genügend erklärt.

Plastische Deformation kann die Krümmungen der Eisstengel (Figuren 2 und 3) sicher erzeugen, wie ROSSMANN [6] meint. Die in solchen Krümmungen liegenden Kristallite zeigen aber keine undulösen Auslöschungen, was die Folge einer nachträglichen plastischen Deformation ist. Die Krümmungen scheinen so nur einer Wachstumsbehinderung zu folgen.



Fig. 4

Querschnitt eines Bündels des Kammeises zwischen Polaroiden (2fach vergrößert).

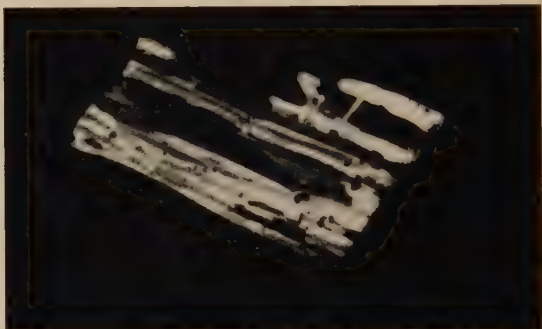


Fig. 5

Längsschnitt eines Bündels des Kammeises zwischen Polaroiden (2fach vergrößert).

Der *modus operandi* der Entstehung des Kammeises muss analog sein wie bei den faserigen Formen an Gips, Kochsalz, Alaunen usw. Für diese findet SCHMIDT [8], dass die Fibern an ihren Basen wachsen und so aufgestossen werden; denn durch Einhüllen der oberen Enden zur Verhinderung einer kapillaren Aktion von Hohlräumen und Oberfläche kann das Wachstum nicht gestoppt werden. Für das Wachstum aus der Schmelze, die der Boden ständig nachliefert, sprechen die Formregelung, die Querdimensionen der Kristallite, die ungefähr den Porenabständen entsprechen, und intrakristalline Lufteinschlüsse (es bestehen auch interkristalline) der Mikroaufnahme Figur 6. Nur GABRAN [9] meint, dass es über die Dampfphase geschieht.

Während der Entstehung des Kammeises besteht ein Temperaturgradient, der die Lage der Stengelachsen einnimmt. Das gilt natürlich nur makroskopisch, denn bei diesem Gemisch von Komponenten ungleicher Wärmeleitfähigkeit (Wasser, Luft, Erdteilchen, Eis) scheint von Fall zu Fall auch eine windschiefe Richtung in Frage zu kommen.

Innerhalb der grossen Variationsbreite der Eiskristalle kennt man die Zusammenhänge zwischen der Lage des Temperaturgradienten und der optischen Achse. Das Eis einer Seeoberfläche hat die optischen Achsen seiner Kristallite als rationale Kristallrichtung normal zur Oberfläche, die auch die Richtung des Temperaturgradienten ist. Auch in einem Rohr, das in eine Kältelösung getaucht wird, liegen die optischen Achsen der entstandenen Kristallite bevorzugt radial, ob das Bad nun eine höhere oder tiefere Temperatur hat, das heisst, der Effekt ist we-



sentlich unabhängig von der Kristallisationsgeschwindigkeit. Die Fensterblumen, deren gekrümmte Form durch einen eigentümlichen Verzweigungsprozess während des Wachstums entsteht, sind in ihren Teilen ebenso orientiert, dass die optische Achse in die Lage der Normalen zur Unterlage und also des Temperaturgradienten einregelt. Auch in der Kristallisation über die Dampfphase bei der konstruktiven Metamorphose des Schnees, die zu den hochmetamorphen Formen Becherkristall, Prisma usw. führt, geht die Selektion in der Richtung einer Parallelstellung der optischen Achsen der Kristalle und des Temperaturgradienten [10].



Fig. 6

Mikroaufnahme eines Längsschnittes von Fibern zwischen Polaroiden, mit Einschlüssen von Luft in der Längsrichtung und einem grösseren Partikel Erde (Vergrösserung 20fach).

Für Eis ist die optische Achse die Richtung der grössten Wärmeleitung [11]. Nach der Regel, die für die Synthetisierung von Kristallen aus der Schmelze allgemein gilt und die für gute Resultate zu beachten ist [12], besteht die Wechselwirkung zwischen dem kristallographischen System des entstehenden Kristalls (nicht isotrop) und der Lage des Wärmeflusses darin (Blaseneinschlüsse erlauben diesen im Falle des Eises zu identifizieren), dass die Achse grösster Wärmeleitung mit der Richtung des letzteren zusammenfällt. Der Temperaturgradient ist natürlich zu diesem parallel.

Für die Dünnschliffe waren die Proben nach einem Anschliff durch eine leichte Schmelzung auf Objektträgern angefroren worden und auf eine Dicke von 0,05–0,2 mm im Kühlraum bei  $-30^{\circ}\text{C}$  von Hand abgeschliffen worden. Die Analyse zur Strukturregelung mit dem Universaldrehtisch verlangt einerseits nicht zu dicke Proben, da Interferenzfarben stören und sich die Korngrenzen überdecken; andererseits macht sich bei dünnen Proben die schwache Doppelbrechung bemerkbar. Wenn die Anschmelzung nicht mit besonderer Sorgfalt durchgeführt wird, kann direkt auf dem Objektträger eine sekundäre Schicht entstehen, die zu Täuschungen führt, da sich die optischen Achsen ihrer Kristallite in die Normale stellen.

An zwei Schnittrichtungen wurde die Analyse ausgeführt. Der eine Schnitt lag quer zur Wachstumsrichtung, für den andern spannen die Längsrichtung und die grösste Querdimension der vielfach wie Bänder aussehenden Bündel die Schnitt-

ebene auf. Die Azimutgrößen der Achsenlage sind immer exakt, Poldistanzen werden mit fallender Neigung gegen die Schnittebene sehr unexakt. Diese Tatsache ist für die Beurteilung der beiden Schnittrichtungen wichtig, indem der Längsschnitt vorteilhafter ist, da das Azimut für diesen Fall mehr Gewicht hat. Für beide Fälle wurden je zirka 150 Kristallite ausgemessen und aufgetragen. Von den Längsschnitten sind die Resultate in Figur 7 zusammengestellt und nach SCHMIDT aus-

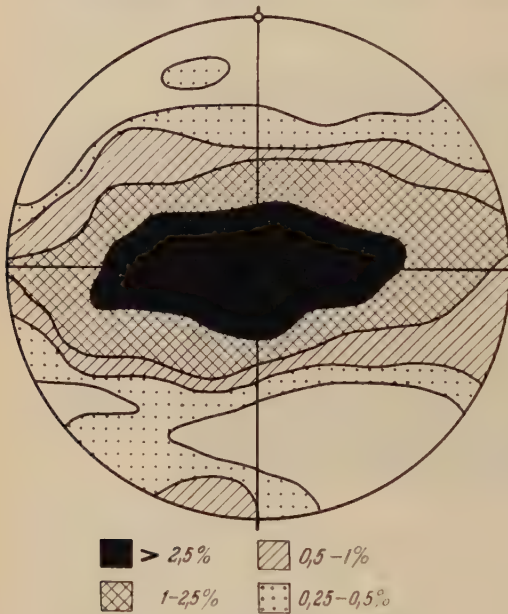


Fig. 7

Lage der Polausstiche in stereographischer Projektion, ausgezählt nach SCHMIDT.

(Nordpol): Pol der Wachstumsrichtung.

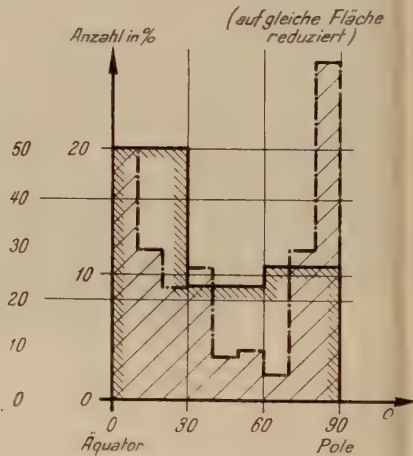


Fig. 8

Mittelwert der Verteilung der Polausstiche in Breitenzonen.

---  $10^\circ$ -Zonen, Abszissenmaßstab rechts.  
—  $30^\circ$ -Zonen, Abszissenmaßstab links.

gezählt, wobei, um eine bessere Mittelung zu erhalten, auf eine Fläche von  $4\%$  bezogen wurde. Die Resultate der Querschnitte sind etwas weniger deutlich; es wird vermutet, dass dort die besprochene sekundäre Schicht, die bei der Anschmelzung entstehen kann, sich stärker auswirkt. Der Längsschnitt ist stabiler und kann so leichter angepresst werden. Die Häufung nahe des Pols der Schnittebene in der Figur 7 ist wahrscheinlich auch eher dem zuzuschreiben als einer Ausrichtung der optischen Achsen senkrecht zur grösseren Querdimension der Bündel.

Das Resultat ist eine, allerdings nicht ausgeprägte, Gürtelregelung. Die optischen Achsen der Kristallite bevorzugen nicht die Richtung der Stengelachse. Die Auszählung nach Breitenkreisen in Prozent, wobei auf Flächengleichheit reduziert ist, stellt den Sachverhalt klar dar (Figur 8).

Für die feinere Auszählung liegt die Schwankungswahrscheinlichkeit nur für die unmittelbare Nähe des Äquators innerhalb der Messungen, für die gröbere Auszählung von  $30^\circ$ -Bereichen ist die letzte Summe gegen die Pole zu vollkommen

unbestimmt. Ein sekundäres Maximum ist nicht zu bemerken, wobei die kleine Anzahl der ausgemessenen Kristallite in Betracht zu ziehen ist.

Die sukzessive Verfolgung der Polausstiche aneinandergrenzender Kristallite zeigt, dass zwischen diesen vielfach eine Verbindung besteht, indem sich diese in Sprüngen von unter  $15^\circ$  als gut verfolgbare Linien darstellen. Die Sprünge sind aber selten so klein, dass man von einem Verzweigungsprozess sprechen könnte, wie er an Eiskristallen oft auftritt [13]. Die Unterscheidung einer bodennahen Schicht und einer oberen Partie des Kammeises – letztere entspricht der ersten Zeit des Wachstums – gibt im wesentlichen dasselbe Ergebnis. Ein Bruch der Kristallite während ihres Vordringens ist ausser acht zu lassen, da die Beobachtungen nicht Kristallite in ihrer Längsrichtung erfassen. Man kann sich mit dieser Tatsache vielleicht an die häufigen Beobachtungen an den atmosphärischen Eisteilchen halten, die von schiefen Aufwachsungen an die basalen Platten sprechen.

Bemerkenswert im Zusammenhange mit den Entstehungsbedingungen des Kammeises ist die Tatsache, dass im Temperaturbereich von  $0^\circ$  bis  $-2,5^\circ\text{C}$  praktisch keine anderen Keime als Eisteilchen selbst existieren [14] [15]; an denen kann aber nur eine Unterkühlung von sicher unter  $0,1^\circ\text{C}$  auftreten [15]. Von  $-2,5^\circ$  bis  $-5^\circ\text{C}$  existieren nur wenige Stoffe, die als Keime für eine spontane Kristallisation dienen können [14] [15]. Da das Kammeis in diesem Bereiche entsteht, kann die Beobachtung der Zusammenhänge der Polausstiche durchaus reell sein. Die Bedingungen, die im Falle der Schmelze zu einem Verzweigungsvorgang führen, sind unbekannt; für die Fensterblumen aber können sie für die Unterlage angegeben werden [16].

Mit der ausgeführten Untersuchung ist man nicht in der Lage, über die Nebenachsen, die röntgenographisch bestimmt werden müssten, etwas auszusagen. Einzelne, ganz feine flachstengelige Fibern waren wohl öfters so, dass man sie als Hauptäste eines Dendriten erkennen konnte, eine Verallgemeinerung dieser Einzelbeobachtungen geht doch nicht an. Es kann nur gesagt werden, dass die Wachstumsrichtung nicht mit der optischen Achse der Kristallite zusammenfällt, dass sogar eine Selektion in dem Sinne zu bemerken ist, dass die optischen Achsen die Senkrechte zur Wachstumsrichtung entgegennehmen. Eine Formregel besteht darin, dass prismatisch-stengelige Kristallite sich in die Faserachse richten. Die Regel für Schmelzen, dass der Temperaturgradient mit der Achse der grössten Wärmeleitung, also der optischen Achse, zusammenfällt, ist nicht erfüllt.

In der Mineralogie sind viele stengelige Formen bekannt, deren Gesetzmässigkeiten sich ordnen. NIGGLI [17] beschreibt den Komplex: «... Mit innertexturellen, durch die morphologischen Verhältnisse des Minerals weitgehend bedingten Erscheinungen machen die Begriffe: stengelige bis faserige, blätterige und körnige bis dichte Aggregatstruktur bekannt. In ihnen kommt noch die Wachstumstendenz des Einzelindividuums zur Geltung. Durch besondere Umstände bei der Bildung ergibt sich im einzelnen eine verschiedene gegenseitige Orientierung der Individuen zueinander, ...». Oder auch über orientierte Aufwachsungen [18]: «Oft beruht die orientierte Aufwachsung in offene, von Lösungen erfüllte Hohlräume (zum Beispiel Drusen, offene Spalten) auf einer für den Stoffansatz günstigen Keimauslese (MOELLER). Einzelne oder in lockerer (schütterer) Verteilung aufgewachsene Kristalle weisen meist in bezug auf die Ansatzfläche keine bevorzugte Stellung auf; erst bei starker Besetzung durch Kristalle macht sich für die grösseren, weitergewachsenen Kristalle eine deutliche, durch Selektion zustande gekommene Regelung bemerkbar. In manchen Fällen, jedoch nicht durchgehend, ist als sogenannte Drusenregel beobachtbar, dass die im Wachstum begünstigten Kristalle die Richtung grösster Wachstumsgeschwindigkeit steil bzw. senkrecht zur Ansatzfläche orientiert haben (HOLZNER). Nicht selten ragen auch schärfste Kanten oder Ecken



in den freien Hohlraum hinein. Es sind also oft rationale Kristallrichtungen senkrecht zur Ansatzfläche zu finden (KALB)...».

CORRENS [19] [20] erklärt die Kraftwirkungen wachsender Kristalle, die verschiedentlich als mystische Kristallisationskraft (NIGGLI) auftritt, damit, dass er die Bilanz der Grenzflächenenergien zwischen Kristall-Unterlage und der Summe von Unterlage-Lösung und Lösung-Kristall betrachtet. Ist letztere Summe kleiner als die Grenzflächenenergie fest-fest, so kann Lösung bzw. Schmelze zwischen die festen Teile eindringen und der Kristall gegen eine Kraft wachsen. Die Grenzflächenenergie gegen einen bestimmten Stoff ist eine anisotrope Eigenschaft des Kristalls, so dass eine Möglichkeit des anomalen Eiswachstums unter Umständen darin zu suchen ist, dass für Prismenflächen die Energiebilanz positiv, für basale Null oder negativ ist. Dass Prismenflächen energiereicher sind, bestätigen die Resultate aus der Rekristallisation von verformten Eisproben, indem Korngrenzenverschiebungen an Prismenflächen am häufigsten sind [21].

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. KENNGOTT, Sitz.-Ber. kgl. Akad. Wiss. 16, 157 (1855).
- [2] C. ABBE, U. S. Dept. Agric., Monthly Weather Rev. 33, 157 (1905).
- [3] DOENITZ, Mitt. dtsch. Ges. Nat. Völkerkde. Ostasiens.
- [4] Sir NAPIER SHAW, *The Drama of Weather* (Cambridge 1933).
- [5] S. TABER, Amer. J. Sci. [4. Ser.], 41, 532 (1916).
- [6] F. ROSSMAN, Meteorol. Z. 54, 64 (1937).
- [7] J. MEYER und W. PFAFF, Z. anorg. allg. Chemie 224, 305 (1935).
- [8] R. SCHMIDT, Z. Gewinn, Verarb. Verwertung Kalisalze 8, 21 (1914).
- [9] O. GABRAN, Meteorol. Z. 54, 427 (1937).
- [10] H. P. EUGSTER, Beitr. Geol. Schweiz, Geotechnische Serie, Hydrologie, 5. Lieferung (Bern 1952).
- [11] N. E. DORSEY, *Properties of Ordinary Water Substances* (Reinhold Publ., New York 1940).
- [12] A. C. MENZIES und J. SKINNER, *The Growing of Crystals*, Crystal Growth, Disc. at the Faraday Soc., S. 306 (1949).
- [13] P. OWSTON und K. LONSDALE, J. Glaciol. 1, 118 (1948).
- [14] G. TAMMANN und A. BÜCHNER, Z. anorg. allg. Chem. 222, 371 (1935).
- [15] R. G. WYLIE, Proc. Phys. Soc. [B] 66, 241 (1953).
- [16] U. NAKAYA und M. HANAJIMA, *Frost* (japanisch).
- [17] P. NIGGLI, *Lehrbuch der Mineralogie und Kristallchemie* (Bornträger, Berlin 1941), S. 395.
- [18] P. NIGGLI, *Gesteine und Minerallagerstätten* (Birkhäuser, Basel 1948), S. 209.
- [19] C. W. CORRENS, Sitz.-Ber. preuss. Akad. Wiss., Phys. Kl. (Berlin 1926), S. 81.
- [20] C. W. CORRENS, *Growth and Dissolution of Crystals under linear pressure*, Crystal Growth, Disc. at the Faraday Soc., S. 267 (1949).
- [21] G. TAMMANN und K. L. DREYER, Z. anorg. allg. Chemie 182, 289 (1929).

### Summary

Fibrous ice is a form of frost in soils. The fibers grow in the underlying melt and are pushed upward. The habit is sometimes described as hexagonal prisms. This could in general not be verified, and an analysis with the universal stage showed that the optical axis of the crystallites lie preferentially perpendicular to the direction of growth and so to the temperature gradient. This is an anomaly in the growth of crystals from a melt.

(Eingegangen: 5. September 1953.)



ELEKTRONENMIKROSKOPE  
MIKROTOME  
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN  
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH


**RICHTER**

# Elektrische Maschinen

**Band II**

## Synchronmaschinen und Einankerumformer

Berichtigte und ergänzte Neuauflage. 735 Seiten mit 525 Figuren. Ganzleinen Fr. 46.80. *Inhalt:* I. Grundbegriffe der Wechselstromerscheinungen in Maschinen – II. Die Synchronmaschine – III. Einankerumformer.

 «Das Buch zeichnet sich vor allem durch eine vor keiner Schwierigkeit zurückschreckende Genauigkeit aus, welche jetzt, wo Einzelleistung und Baustoffbeanspruchung der Maschinen den erreichbaren Grenzen zustreben, eine immer zunehmende Berechtigung erhält. Es wird daher den bauenden Techniker bei Behandlung derartiger Grenzprobleme vor unliebsamen Überraschungen bewahren.» (PRIMAVESI, Elektr. und Maschinenbau.)

## **Wissenschaftliche Zeitschriften** **aus dem Verlag Birkhäuser, Basel/Stuttgart**

**Experientia.** Revue mensuelle des sciences pures et appliquées. Monatsschrift für das gesamte Gebiet der Naturwissenschaft. Rivista mensile di scienze pure e applicate. Monthly Journal of Pure and Applied Science. Editores: *A. v. Murali*, Bern – *L. Ruzicka*, Zürich – *J. Weigle*, Genève. Erscheint seit 1945. Abonnementspreis pro Jahr Fr. 32.–, Ausland Fr. 38.–, Einzelnummer Fr. 3.50.

**Helvetica Physica Acta.** Edita a Societate Physica Helvetica. Erscheinen seit 1928.  $23 \times 15,5$  cm. Abonnementspreis pro Jahr Fr. 44.–; Ausland Fr. 52.–; Einzelnummer Fr. 11.–.

**Archiv der Mathematik.** Herausgegeben von *H. Kneser* und *W. Süss*. Erscheint sechsmal jährlich, seit 1948.  $24 \times 17$  cm. Abonnementspreis pro Jahr Fr. 60.–; Einzelnummer Fr. 12.–.

**Technica,** Illustrierte technische Zeitschrift. Erscheint vierzehntäglich. Abonnementspreis pro Jahr Fr. 14.40, Ausland Fr. 18.–. Einzelnummer 60 Rp., Ausland 75 Rp.

**Elemente der Mathematik.** Revue de mathématiques élémentaires. Rivista di matematica elementare.  $24 \times 16,5$  cm. Erscheinen alle 2 Monate. Jährlich Fr. 10.–, Ausland Fr. 14.–; Einzelnummer Fr. 2.50.

**Schweizerische paläontologische Abhandlungen – Mémoires suisses de paléontologie.** Herausgegeben von der Schweizerischen Paläontologischen Gesellschaft. Erscheinen seit dem Jahre 1874, pro Jahr durchschnittlich ein Band.  $32 \times 24$  cm. Preis pro Band Fr. 75.–.

**Eclogae Geologicae Helvetiae.** Herausgegeben von der Schweizerischen Geologischen Gesellschaft. Erscheinen seit 1888.  $24,5 \times 17$  cm. Jährlich 1 Vol. mit 2 Hefen à ca. Fr. 20.– (je nach Umfang).

**Schweizerische Zeitschrift für Hydrologie.** Revue suisse d'Hydrologie. Herausgegeben von der Hydrobiologischen Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Jährlich erscheinen 2 Hefte, seit 1920. Abonnementspreis: Inland Fr. 24.–, Ausland Fr. 28.–.

*Verlangen Sie bitte unverbindlich eine Gratis-Probenummer*



*Clichés für Wissenschaftliche Arbeiten*  
*unsere Spezialität*

*Clichés*

**STEINER+CO**

SCHÜTZENMATTSTR. 31

BASEL

# Werke der reinen und angewandten Mathematik und Physik

## Mathematik

BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen . . .	geb. Fr. 18.70
BLASCHKE, W.: Projektive Geometrie . . . . .	geb. Fr. 19.60
BLASCHKE, W.: Analytische Geometrie . . . . .	geb. Fr. 19.60
CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie, Bd. I geb. Fr. 39.50, Bd. II	geb. Fr. 27.05
CARATHÉODORY, C.: Mass und Integral und ihre Algebraisierung .	erscheint 1954
DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I:	
Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation . .	geb. Fr. 83.20
FINSLER, P.: Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen . . .	geb. Fr. 15.40
FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes .	geb. Fr. 24.95
HERRMANN, H.: Übungen zur projektiven Geometrie . . . . .	geb. Fr. 17.—
HURWITZ, A.: Mathematische Werke, 2 Bände . . . . .	geb. je Fr. 54.10
LINDER, A.: Statistische Methoden, 2. Auflage 1951 . . . . .	geb. Fr. 31.20
LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung . . . . .	geb. Fr. 49.90
LOCHER-ERNST, L.: Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven	geb. Fr. 12.50
OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Diff.- u. Integralrechng., Band I	geb. Fr. 36.40
(Band III in Vorbereitung) Band II	geb. Fr. 69.70
SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I	geb. Fr. 56.15
(Band III in Vorbereitung) Band II	geb. Fr. 56.15
STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie . . . . .	geb. Fr. 29.65
TROST, E.: Primzahlen . . . . .	brosch. Fr. 13.50
VOELKER, D., DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transf.	geb. Fr. 47.85
ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik . . . . .	geb. Fr. 31.20

## Physik und Astronomie

GOMBÁS, P.: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenpro-	
blems der Wellenmechanik . . . . .	geb. Fr. 33.30
NIETHAMMER, TH.: Astronomisch-geogr. Ortsbestimmung . . . .	geb. Fr. 36.40
VON DER PAHLEN, E.: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen	geb. Fr. 39.50
WALDMEIER, M.: Einführung in die Astrophysik . . . . .	geb. Fr. 49.40
Kongressbericht der Internat. Konferenz über Kernphysik und	
theoretische Physik, Basel 1949. 248 S., viele Illustr. Brosch.	Fr. 16.65

## Ingenieurwissenschaften

BODEA, E.: Giorgis rationales MKS-Maßsystem. Broschiert. . . .	Fr. 28.10
GOLDSTEIN, J.: Die Messwandler . . . . .	geb. Fr. 29.10
JAEGER, CH.: Technische Hydraulik . . . . .	geb. Fr. 52.—
KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik. Band II: Grundzüge	
der Theorie der Wechselströme u. des einphasigen Transformators	geb. Fr. 27.55
Band III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen . . .	geb. Fr. 74.90
MEISSNER, E., und ZIEGLER, H.: Mechanik. Band I: Statik der star-	
ren, flüssigen und elastischen Körper . . . . .	geb. Fr. 37.45
Band II: Dynamik der starren Körper . . . . .	geb. Fr. 33.80
Band III: Dynamik der Systeme . . . . .	geb. Fr. 46.80
MICHAEL, W.: Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene	geb. Fr. 13.50
SÄNGER, R.: Ballistische Störungstheorie . . . . .	geb. Fr. 15.10
STÜSSI, R.: Vorlesungen über Baustatik, Band I . . . . .	geb. Fr. 40.05
RUSTERHOLZ, A.: Elektronenoptik, Band I: Grundzüge . . . . .	geb. Fr. 31.20
RICHTER, R.: Elektrische Maschinen . . . . .	geb. Fr. 49.40
Band I	
Band II	geb. Fr. 46.80
VIDMAR, M.: Die Gestalt der elektrischen Freileitung . . . . .	geb. Fr. 19.75

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER, BASEL/STUTTGART









